МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра теоретической физики

В. Г. Сербо

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Курс лекций)

Новосибирск
2011

.

Данный курс лекций предназначен для студентов 4-го курса физического факультета, специализирующихся по кафедре физики элементарных частиц. Содержание соответствует курсу “Физика элементарных частиц”. Пособие может также оказаться полезным и для студентов других специальностей НГУ.

Автор
докт. физ.-мат. наук, проф. В.Г. Сербо

Курс лекций подготовлен в рамках реализации Программы развития НИУ-НГУ на 2009–2018 г.

?

Оглавление

ПРИЛОЖЕНИЯ

Нумерация формул в тексте содержит две цифры. Например, (3.7) означает формулу (7) из § 3. Ссылки на формулы из данного параграфа даются в сокращённом виде без указания номера параграфа.

Постоянные:
$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-27}$ эрг$\cdot$ с — постоянная Планка;
$c = 2,998 \cdot 10^{10}$ см/с — скорость света;
$|e| = 4,803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС — элементарный заряд;
$\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137.04$ — постоянная тонкой структуры;
1 эВ$=1,602 \cdot 10^{-12}$ эрг$=1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж.
Единицы:

В начальных разделах § 1—§ 2 и приложениях § A—§ C, § F.1 используется абсолютная гауссова система единиц. В остальных разделах используется релятивистская система единиц, в которой $c = 1$, $\hbar = 1$. В этой системе энергия, импульс, частота, (длина)$^{-1}$ и (время)$^{-1}$ имеют одинаковую размерность, в частности
$m_e = 0,511$ МэВ — масса электрона;
$m_p = 0,940$ ГэВ — масса протона;
$1/m_e = 3,862 \cdot 10^{-11}$ см — приведённая комптоновская длина волны электрона;
$r_e = \alpha/m_e = 2,818 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона;
$1/(1\ \text{ГэВ}) = 1,97 \cdot 10^{-14}$ см.
4-векторы:

По повторяющимся индексам 4-векторов подразумевается суммирование, т. е. выражение $A^\mu B_\mu$ означает $A^\mu B_\mu \equiv A_0 B_0 - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z = A_0 B_0 - \mathbf{AB}$. Мы нередко будем использовать сокращенное обозначение $AB \equiv A^\mu B_\mu$.

4-радиус-вектор $x^\mu = (t,\, \mathbf{r})$, $x_\mu = (t,\, -\mathbf{r})$,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, +\bigtriangledown\right) \equiv \partial_\mu\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\bigtriangledown\right) \equiv \partial^\mu\,.$$

§ 1. Введение: элементарные частицы и их взаимодействия

Чтобы за деревьями не потерять леса, перечислим в телеграфном стиле основные типы частиц и их взаимодействий.

1.1. Частицы

Содержание понятия “элементарная частица” изменялось во времени. Сейчас это условно мельчайшая частица, но не атом и не ядра (исключение составляет протон p — ядро атома водорода). Элементарных частиц больше, чем атомов в таблице Менделеева — см. Review of Particle Physics. Их наиболее характерная черта — способность рождаться и взаимно превращаться в реакциях. Сравним фотоэффект

$$\gamma + H \to p + e$$

и β-распад нейтрона

$$n \to p + e + \bar{\nu}_e\,;$$

во втором случае до распада n не было p, e и $\bar{\nu}_e$, они возникли в результате реакции.

Если потребовать неразложимости на составляющие, то останется немного “фундаментальных частиц”:

- лептоны и кварки (l и q), спин $J = \frac{1}{2}$;
- калибровочные векторные бозоны (γ, $W^{\pm}$, Z^0, g), $J = 1$;
- скалярный бозон Хиггса (H), $J = 0$.

1.2. Взаимодействия

Основные типы взаимодействия частиц таковы.

1. *Электромагнитное (ЭМ)*: характерный радиус взаимодействия $R_{\mathrm{em}} \sim \dfrac{\hbar}{m_\gamma c} = \infty$, так как $m_\gamma = 0$, сила взаимодействия характеризуется безразмерной константой $\alpha = \dfrac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \ll 1$, поэтому здесь возможно применять теорию возмущений — квантовую электродинамику (КЭД);

2. *Гравитационное*: $R_{\mathrm{g}} \sim \infty$, очень слабое, в атомных масштабах пренебрежимо мало, для двух протонов в ядре
$$\frac{F_{\mathrm{g}}}{F_{\mathrm{em}}} \sim \frac{G m_p^2}{e^2} \sim 10^{-36}\,;$$

3. *Сильное*: ответственно за связь нуклонов в ядре, за быстрые распады резонансных состояний, характерное время $\tau_{\mathrm{s}} \sim 10^{-24}$ с, $R_{\mathrm{s}} \sim \dfrac{\hbar}{m_\pi c} \sim 10^{-13}$ см, сила взаимодействия характеризуется безразмерной константой $\alpha_{\mathrm{s}} \sim 1$ на расстояниях $\sim R_{\mathrm{s}}$;

4. *Слабое*: отвечает за распад многих долгоживущих частиц: n, π, K, ..., характерное время $\tau_{\mathrm{w}} \sim 10^{-13} \div 10^{-8}$ с, $R_{\mathrm{w}} \sim \dfrac{\hbar}{m_W c} \sim 10^{-16}$ см. Пример — нейтрино ν, при малых (реакторных) энергиях ν проходит сквозь Землю, при $E \sim m_W c^2$ сечения взаимодействия сравниваются с электромагнитными.

Взаимодействия элементарных частиц осуществляется через обмен

- γ — для ЭМ взаимодействия;
- $W^{\pm}$ и Z — для слабого взаимодействия;
- g — для сильного взаимодействия.

1.3. Три поколения лептонов и кварков

$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ — 1-е поколение,

$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ — 2-е поколение,

$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$ — 3-е поколение

+ античастицы.

Заряд Qe: $\begin{pmatrix} Q_\nu = 0 \\ Q_e = -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Q_u = \frac{2}{3} \\ Q_d = -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, спин $J = \frac{1}{2}$ и то же у других поколений.

Есть значительные отличия в массах для разных поколений — см. таблицы.

У кварков есть дополнительное квантовое число — *цвет*: $q = q^i$, $i = 1, 2, 3$ (красный, синий, зеленый).

Кварки участвуют в сильных, ЭМ и слабых взаимодействиях.

e, μ, τ участвуют в ЭМ и слабых взаимодействиях.

ν участвуют в слабых взаимодействиях.

1.4. Кварки и адроны

Адроны — бесцветные образования:

- мезоны: $q\bar{q}$, например, $\pi^+ = u\bar{d}$;
- барионы: qqq, например, $p = uud$, $n = udd$.

Возможная экзотика: 4-х кварковые мезоны $q\bar{q}q\bar{q}$, 5-и кварковые барионы $qqqq\bar{q}$, и т. д.

Кварки взаимодействуют с цветными глюонами g^i_j, $i, j = 1, 2, 3$, что приводит к невылетание цвета (*конфайнмент*).

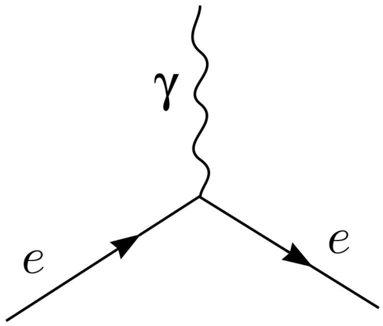


Рис. 1. Элементарный процесс КЭД

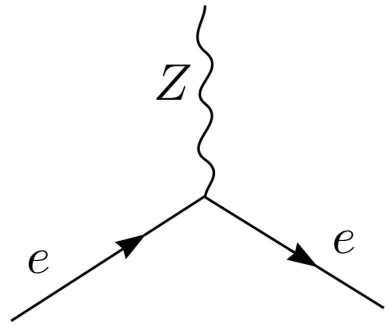


Рис. 2. Элементарный слабый процесс

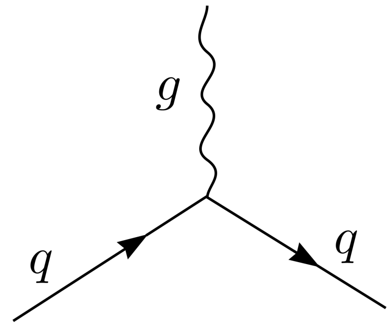


Рис. 3. Элементарный сильный процесс

1.5. Понятие о квантовой теории поля

Все элементарные частицы — кванты соответствующих полей, основные взаимодействия элементарных частиц описываются как взаимодействия квантовых полей:

ЭМ-взаимодействие. Заряженные частицы, например e, взаимодействуют через ЭМ-поле. Но ЭМ-поле (после квантования) — набор частиц-фотонов. Сами электроны — частицы-кванты электронно-позитронного поля.

ЭМ-взаимодействию соответствует потенциальная энергия $U = q\phi$, где q — заряд частицы, а ϕ — скалярный потенциал ЭМ поля. Плотность этой энергии — величина $\rho\,(t, \mathbf{r})\,\phi\,(t, \mathbf{r})$ в релятивистском случае переходит в произведение 4-вектора плотности тока j_μ и 4-потенциала A_μ:

$$j_\mu A^\mu = c\rho(x)\phi(x) - \mathbf{j}(x)\mathbf{A}(x),$$

где $x = (ct, \mathbf{r})$ — 4-радиус-вектор.

В нерелятивистской квантовой механике плотность тока

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2}e\left(\Psi^*\,\hat{v}\,\Psi + \text{комплексное сопряжение}\right)\,,$$

где e — заряд частицы, а $\hat{v} = -i\hbar\nabla/m$.

В релятивистской квантовой механике

$$j^\mu(x) = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\,,$$

где γ^μ — матрицы Дирака.

Итого, взаимодействие типа $e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$ описывает процессы (реальные и виртуальные) типа рис. 1. Сила (константа) взаимодестйвия $\alpha = \dfrac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$.

Слабое взаимодействие — его переносчики $W^\pm$ и Z^0 бозоны, их массы $m_W c^2 = 80,4$ ГэВ, $m_Z c^2 = 91,2$ ГэВ. Пример слабого виртуального процесса с несохранением чётности (рис. 2)

$$\frac{e}{\sin 2\theta_W}\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(g_V - g_A\gamma^5\right)\Psi Z_\mu$$

здесь g_V и g_A — безразмерные константы порядка 1.

Сильное взаимодействие — его переносчиком является глюон g, константа сильного взаимодействия $\alpha_{\text{s}} = \dfrac{g_{\text{s}}^2}{\hbar c} \approx 0,3 \div 0,1$. Пример сильного виртуального процесса (рис. 3)

$$g_{\text{S}} \bar{\Psi}_q^i \gamma^\mu \Psi_{qj} \, (g_\mu)_i^j$$

Теорию квантовых полей мы начинаем с подробного изложения процедуры квантования электромагнитного поля. Конечно, это не самый простой, но зато наиболее привычный объект, поскольку классическое электромагнитное поле достаточно подробно изучалось в курсе электродинамики, а квантование электромагнитного поля уже частично излагалось в курсе квантовой механики.

§ 2. Квантование электромагнитного поля

2.1. Электромагнитное поле как набор осцилляторов

Гамильтониан обычного линейного осциллятора имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\,,$$

а канонические переменные x и p зависят от времени по закону:

$$x(t) = b\cos(\omega t + \varphi)\,, \;\; p(t) = -m\omega b \sin(\omega t + \varphi)\,,$$

где b — амплитуда, а φ — начальная фаза колебаний. Введём линейные комбинации x и p вида

$$a = \frac{m\omega x + \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,, \;\; a^* = \frac{m\omega x - \mathrm{i}p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

и напомним, что величины a и $\mathrm{i}\hbar\, a^*$ также являются каноническими переменными с простой зависимостью от времени:

$$a(t) \propto b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)}\,, \;\; a^*(t) \propto b\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,(\omega t + \varphi)}\,.$$

В этих переменных гамильтониан имеет особенно простой вид

$$H = \hbar\omega a^* a\,.$$

Покажем, что электромагнитное поле в пустоте может быть сведено к набору осцилляторов, описываемых переменными a и a^*.

Электрическое $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и магнитное $\mathbf{B}$ поля в пустоте удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \;\; \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0\,, \;\; \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\,, \;\; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0\,.$$

Удобно ввести четырёхмерный потенциал $A^\mu(t, \mathbf{r}) = (\phi,\; \mathbf{A})$, через который электрическое и магнитное поля выражаются следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,, \;\; \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\,.$$

Из-за неоднозначности выбора 4-потенциала, на него можно наложить дополнительное *условие Лоренца*

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0\,.$$

В отсутствие источников поля можно выбрать скалярный потенциал $\phi = 0$, при этом условие Лоренца означает, что

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0$$

(так называемая *кулоновская калибровка*). Тогда из уравнения

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

следует, что трехмерный векторный потенциал $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = 0\,.$$

В импульсном представлении, учитывающем в явном виде вещественность векторного потенциала,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\left[\mathbf{A}_\mathbf{k}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} + \mathbf{A}^*_\mathbf{k}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right]\,, \tag{2.1}$$

амплитуды $\mathbf{A}_\mathbf{k}(t)$ удовлетворяют осцилляторному уравнению

$$\ddot{\mathbf{A}}_\mathbf{k} + \omega^2_\mathbf{k}\,\mathbf{A}_\mathbf{k} = 0, \quad \omega_\mathbf{k} = c|\,\mathbf{k}|\,. \tag{2.2}$$

Итак, в каждой моде, то есть для каждого волнового вектора $\mathbf{k}$, имеем гармонический осциллятор, так что

$$\mathbf{A}_\mathbf{k}(t) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathbf{k} t}\,, \;\; \mathbf{A}^*_\mathbf{k}(t) \propto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathbf{k} t}\,. \tag{2.3}$$

Разложение по плоским волнам (1) позволяет говорить об электромагнитном поле как о бесконечном наборе осцилляторов, частоты которых ω_k пробегают непрерывный ряд значений. При квантовании этих осцилляторов возникает квантованное электромагнитное поле. Для придания большей наглядности процедуре квантования, удобно перейти к дискретному набору осцилляторов. Для этого рассмотрим поле в конечном объеме

$$\mathcal{V} = L_x L_y L_z$$

и используем условие периодичности поля на границах объема. При этом компоненты волнового вектора и частота становятся дискретными,

$$k_x = \frac{2\pi\,n_x}{L_x}\,, \;\; k_y = \frac{2\pi\,n_y}{L_y}\,, \;\; k_z = \frac{2\pi\,n_z}{L_z}\,, \;\; \omega_\mathbf{k} = 2\pi c\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}}\,,$$

где $n_{x,y,z}$ — целые (положительные и отрицательные) числа, а плоские волны удовлетворяют соотношению ортогональности вида

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}\,d^3r = \mathcal{V}\,\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}\,. \tag{2.4}$$

В итоге вместо разложения в интеграл Фурье (1) возникает разложение в ряд Фурье

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} + \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right] , \tag{2.5}$$

где новые амплитуды $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ удовлетворяют тем же соотношениям (2)−(3), что и раньше. Разложение, подобное (5), можно написать и для электрического и магнитного поля, причем амплитуды этих полей в силу уравнений

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

связаны с амплитудами векторного потенциала соотношениями

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{i}\omega_k}{c}\,\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\,, \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\,.$$

Из-за условия div $\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = 0$ или

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0\,, \tag{2.6a}$$

вектор $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ лежит в плоскости, ортогональной волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет лишь две независимые компоненты. Две степени свободы осциллятора соответствуют поперечности свободных электромагнитных волн в вакууме. Введем два вектора поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$, где индекс λ пробегает два значения. Например, для циркулярной поляризации при волновом векторе вдоль оси z, то есть при $\mathbf{k} = (0,\,0,\,k)$, вектор поляризации выбирают в виде

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\,(1,\,\mathrm{i}\lambda,\,0) = -\mathbf{e}^*_{\mathbf{k},-\lambda}\,,$$

где $\lambda = \pm 1$ соответствует правой (левой) циркулярной поляризации. Векторы поляризации удовлетворяют условиям поперечности:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = 0\,, \tag{2.6b}$$

взаимной ортогональности:

$$\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{2.7}$$

и полноты:

$$\sum_{\lambda} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda})_i\,(\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda})_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \tag{2.8}$$

(здесь i, j означает компоненты вектора поляризации; справа стоит единичный тензор в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{k}$). Разложим вектор $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$ по векторам поляризации

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = C_{\mathbf{k}}\sum_{\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}(t)\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$$

и выберем нормировочный множитель $C_{\mathbf{k}}$ таким образом, чтобы энергия поля свелась к сумме осцилляторных энергий:

$$E = \int \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}\,d^3r = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\,a^*_{\mathbf{k}\lambda}\,a_{\mathbf{k}\lambda}\,. \tag{2.9}$$

Для этого представим $\boldsymbol{\mathcal{E}}^2$ в виде двойной суммы

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}}\right] \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}'}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{r}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}'}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}'\mathbf{r}}\right]$$

и проведем интегрирование по $\mathbf{r}$, используя (4),

$$\int \boldsymbol{\mathcal{E}}^2\, d^3r = \mathcal{V} \sum_{\mathbf{k}} \left[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_{-\mathbf{k}}(t) + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{-\mathbf{k}}(t) + 2\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t)\right] .$$

Зависящие от времени слагаемые $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_{-\mathbf{k}}(t) \propto \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{-\mathbf{k}}(t) \propto \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}$ сокращаются, а независящие от времени слагаемые $2\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t)$ удваиваются при учете вклада магнитного поля $\int \mathbf{B}^2\, d^3r$. В итоге получаем

$$E = \frac{\mathcal{V}}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\mathcal{V}}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\omega^2_{\mathbf{k}}}{c^2}\,|C_{\mathbf{k}}|^2\; a^*_{\mathbf{k}\lambda}\, a_{\mathbf{k}\lambda} \,.$$

Отсюда видно, что при выборе нормировочного множителя в виде

$$C_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}} \,,$$

т. е. при использовании разложения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\; \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t)\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}} + a^*_{\mathbf{k}\lambda}(t)\,\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}}\right] \,, \tag{2.10}$$

энергия поля действительно сводится к сумме осцилляторных энергий (9), а энергия каждой моды колебаний с заданной поляризацией λ равна

$$E_{\mathbf{k}\lambda} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}\, a^*_{\mathbf{k}\lambda}\, a_{\mathbf{k}\lambda} \,. \tag{2.11}$$

Совершенно аналогично можно показать, что выражение для полного импульса поля

$$\mathbf{P} = \int \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{B}}{4\pi c}\, d^3r$$

сводится к сумме соответствующих импульсов для каждой моды колебаний

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\mathbf{k} a^*_{\mathbf{k}\lambda}\, a_{\mathbf{k}\lambda} \,, \tag{2.12}$$

а импульс отдельной моды с заданной поляризацией λ равен

$$\hbar\mathbf{k} a^*_{\mathbf{k}\lambda}\, a_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,\frac{E_{\mathbf{k}\lambda}}{c} \,.$$

2.2. Квантование поля

Напомним, что при квантовании обычного осциллятора зависящие от времени классические величины $a(t)$ и $a^*(t)$ становятся операторами уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^+$ кванта с энергией $\hbar\omega$, для которых справедливы перестановочные соотношения

$$[\hat{a},\, \hat{a}^+] = 1\,. \tag{2.13}$$

При этом сами операторы в обычном шрёдингеровском представлении не зависят от времени, а временная зависимость определяется волновыми функциями. Классический гамильтониан H становится оператором Шрёдингера

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2}\,\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+)\,.$$

При использовании перестановочных соотношений (13) оператор $\hat{H}$ приводится к виду

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \tfrac{1}{2}), \quad \hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}\,,$$

где $\hat{n}$ — оператор числа квантов, собственные значения которого суть целые числа $n = 0,\,1,\,2,\ldots$

Аналогично, при квантовании электромагнитного поля величины $a^*_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ и $a_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ становятся операторами рождения $\hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}$ и уничтожения $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ кванта, соответствующего фотону с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ, а векторный потенциал (10) становится не зависящим от времени оператором

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\;\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} + \hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right)\,. \tag{2.14}$$

Поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}(t,\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(t,\mathbf{r})$ также становятся операторами

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}}{c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\;\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} - \hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right)\,, \tag{2.15}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\;\mathrm{i}\mathbf{k}\times\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}} - \hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}^*_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\right)\,,$$

а выражения для энергии и импульса электромагнитного поля становятся суммами операторов Шрёдингера и операторов импульса для отдельных фотонов:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\hat{H}_{\mathbf{k}\lambda}\,, \quad \hat{H}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2}\,\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left(\hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\right)\,, \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,\frac{\hat{H}_{\mathbf{k}\lambda}}{c}\,. \tag{2.16}$$

При использовании перестановочных соотношений

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda},\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}'\lambda'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\,, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda},\, \hat{a}_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0\,, \quad [\hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda},\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}'\lambda'}] = 0 \tag{2.17}$$

оператор $\hat{H}_{\mathbf{k}\lambda}$ приводится к виду

$$\hat{H}_{\mathbf{k}\lambda} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}(\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} + \tfrac{1}{2}), \quad \hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = \hat{a}^+_{\mathbf{k}\lambda}\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\,, \tag{2.18}$$

где $\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda}$ — оператор числа квантов, собственные значения которого суть целые числа $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0,\,1,\,2,\ldots$. Можно показать, что правая (левая) циркулярная поляризация фотона соответствует его спиральности[1], равной $\pm\hbar$.

[1]Напомним, что спиральность частицы есть проекции её полного момента импульса на направление импульса частицы.

2.3. Рождение и уничтожение квантов поля

Пусть $|\, n_{\mathbf{k}\lambda}, t\,\rangle$ — состояние поля, содержащее $n_{\mathbf{k}\lambda}$ фотонов с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ каждый. Так как

$$\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}, t\,\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}+1}\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}+1, t\,\rangle\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,,$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}, t\,\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}}\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}-1, t\,\rangle\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,,$$

то из (14) или (15) видно, что при действии оператора $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ или оператора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{r})$ на начальное состояние поля может происходить излучение или поглощение одного фотона. Таким образом, матричные элементы опратора $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ равны:

при излучении фотона

$$\langle\, n_{\mathbf{k}\lambda}+1, t\,|\,\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}, t\,\rangle = \mathbf{A}_{fi}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,,$$

$$\mathbf{A}_{fi}(\mathbf{r}) = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}+1}\,\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\,\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{kr}}\,, \tag{2.19}$$

при поглощении фотона

$$\langle\, n_{\mathbf{k}\lambda}-1, t\,|\,\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\,|\, n_{\mathbf{k}\lambda}, t\,\rangle = \mathbf{A}_{fi}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,,$$

$$\mathbf{A}_{fi}(\mathbf{r}) = \sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}}\,\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{kr}}\,. \tag{2.20}$$

Излучение какой-либо системы зарядов (например, атома) может происходить в условиях, когда начальное состояние электромагнитного поля не содержит фотонов, то есть $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ (такое излучение называют *спонтанным*), или в в условиях, когда в начальном состоянии поля уже имеется $n_{\mathbf{k}\lambda}$ фотонов (такое излучение называют *вынужденным*). Вероятность излучения пропорциональна квадрату модуля матричного элемента (19). Обратим внимание на то, что вероятность вынужденного излучение оказывается в $(n_{\mathbf{k}\lambda}+1)$ раз больше, чем вероятность спонтанного излучения. Этот факт является фундаментальным для физики лазеров.

До сих пор мы пользовались шрёдингеровским представлением, в котором операторы поля зависят от координат, но не от времени. В релятивистской теории, однако, более удобным является представление Гайзенберга, в котором операторы поля зависят от 4-радиус-вектора $x = (ct,\, \mathbf{r})$, а векторы состояний не зависят от времени. Формулы (19), (20) показывают, что для перехода к гайзенберговскому представлению достаточно в разложении (14) сделать замену

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda} \to \hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,,\quad \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}\lambda} \to \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathbf{k}}t}\,. \tag{2.21}$$

Таким образом, гайзенберговское представление для векторного потенциала имеет вид

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \sqrt{4\pi\hbar c^2}\,\sum_{\mathbf{k}\lambda}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}} + \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\,\mathcal{V}}}\right)\,,\quad kx = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{kr}\,, \tag{2.22}$$

где коэффициенты $\hat{a}_{\mathbf{k}\lambda}$ при $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ и $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ при $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (17), являются операторами уничтожения и рождения квантов поля —

фотонов с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией λ. Отметим, что волновая функция

$$\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{V}}}\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\sqrt{4\pi\hbar c^2} \tag{2.23}$$

соответствует нормировке на одну частице во всем объеме $\mathcal{V}$. Такую же нормировку мы будем использовать и при квантовании скалярного и спинорного полей.

§3. Лагранжев подход в теории поля

3.1. Уравнения Лагранжа

В классической механике функция Лагранжа $L\,(q,\dot{q})$ зависит от обобщённых координат q_i и обобщённых скоростей $\dot{q}_i = \partial_0 q_i$, а действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,(q,\dot{q})\,dt\,.$$

Из принципа Гамильтона: $\delta S = 0$ при условии $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ получаются уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,.$$

В классическая теория поля вводится плотность функции Лагранжа

$$L \to \int \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^3 r\,,$$

роль обобщённых координат q_i играют поля:

$A_\mu(x)$ в электродинамике,

$\Phi(x)$ — для действительного скалярного поля,

$\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ — для комплексного скалярного поля,

$\Psi_i(x)$ и $\overline{\Psi}_i(x)$ — для спинорного поля Дирака и т. д.

Здесь[2] $x = (t, \mathbf{r})$.

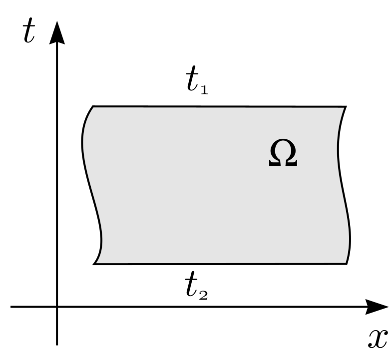


Рис. 4. Область Ω

Действие

$$S = \int_\Omega \mathcal{L}(q, \partial_\mu q) d^4 x,$$

где Ω — кусок 4-пространства между двумя пространственно-подобными 4-поверхностями, например, между $t = t_1$ и $t = t_2$ (рис. 4). Принцип Гамильтона формулируется в виде: $\delta S = 0$ при условии, что $\delta q_i = 0$ на границе Σ области Ω.

Требования к плотности функции Лагранжа:

- локальность, т. е. $\mathcal{L}$ зависит от q и конечного числа производных от q;
- $\mathcal{L}$ — действительная функция, чтобы энергия и импульс были действительными, а S-матрица унитарной;

[2]Здесь и ниже (за исключением приложений § A—§ C, § F.1) полагаем $\hbar = 1$, $c = 1$.

- $\mathcal{L}$ — Лоренц-инвариантная функция.

Выбор $\mathcal{L}$ неоднозначен, замена $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(q)$ дает ту же вариацию действия,

$$\delta S' = \delta S + \delta \int_\Omega \partial_\mu f^\mu(q) d^4x = \delta S + \delta \int_\Sigma f^\mu d\Sigma_\mu = \delta S\,.$$

При этом мы воспользовались обобщением трёхмерной теоремы Стокса

$$\int_V (\nabla\,\mathbf{f})\, d^3r = \oint_S \mathbf{f}\, d\mathbf{S}$$

на область в 4-пространстве:

$$\int_\Omega \partial_\mu f^\mu d^4x = \oint_\Sigma f^\mu d\Sigma_\mu$$

и тем фактом, что на поверхности Σ величины q не варьируются.

Потребуем $\delta S = 0$, это дает

$$\begin{aligned} \delta S &= \int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta(\partial_\mu q) \right\} d^4x = \\ &= \int\limits_\Omega \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)} \right] \delta q + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q)}\delta q \right] \right\} d^4x = 0 \end{aligned}$$

Последнее слагаемое преобразуем по теореме Стокса, и оно исчезает, т. к. $\delta q|_\Sigma = 0$. В итоге получаем уравнения движения для полей:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,.$$

3.2. Симметрия и законы сохранения

3.2.1. Теорема Нётер

В классической механике известна теорема Нётер: если вид действия не изменяется при преобразованиях

$$q \to q' = q + \delta q, \quad t \to t' = t + \delta t,$$

т. е. если[3]

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) dt = \int\limits_{t_1'}^{t_2'} L\left(q', \frac{dq'}{dt'}\right) dt' \tag{3.1a}$$

с точностью до $\delta q, \delta t$ включительно, то сохраняется величина

$$E\delta t - p\delta q = \mathrm{const},$$

[3]Подчеркнём, что в левой и правой сторонах равенства (1a) стоит *одна и та же функция* L, но от разных аргументов.

где

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L\,.$$

Иначе, величина

$$\delta\Theta = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \delta t - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \tag{3.2a}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta\Theta}{dt} = 0\,. \tag{3.3a}$$

Теорема Нётер для классических полей: пусть при непрерывном преобразовании 4-координат

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$$

и полей

$$q_i \to q'_i = q_i + \delta q_i$$

вариация

$$\delta S = 0 \tag{3.1b}$$

(сохраняется вид действия), тогда величина

$$\delta\Theta^\mu = \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)} \partial_\nu q_i - g^\mu_\nu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)} \delta q_i \tag{3.2b}$$

удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\Theta^\mu = 0\,, \tag{3.3b}$$

из которого следует закон сохранения:

$$\int \delta\Theta_0 d^3 r = \mathrm{const}\,. \tag{3.3c}$$

Рассмотрим два важных примера.

3.2.2. Однородность пространства-времени и сохранение импульса-энергии

Пусть вид действия не изменяется при сдвиге 4-координат

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_\mu\,,$$

т. е. $\delta S = 0$ при $\delta x_\mu = \varepsilon_\mu$ и $\delta q = 0$. В этом случае из теоремы Нётер следует, что 4-вектор

$$\delta\Theta^\mu = T^{\mu\nu} \varepsilon_\nu\,,$$

где

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)} \partial^\nu q_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

— плотность тензора энергии-импульса, удовлетворяет уравнению ($3b$) или

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0\,.$$

Поэтому сохраняется 4-импульс поля:

$$\int T^{\mu 0} d^3 r = P^\mu = \mathrm{const}^\mu$$

Проверим этот факт следующим вычислением, вполне аналогичным такой же выкладке в классической механике. Для этого найдем производную

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial(\partial_\nu q)}{\partial x^\mu}$$

и перепишем первое слагаемое в правой части, используя уравнения движения

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)},$$

а во втором слагаемом произведём перестановку порядка дифференцирования $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$\frac{\partial(\partial_\nu q)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial(\partial_\mu q)}{\partial x^\nu}\,.$$

В итоге получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\right]\frac{\partial q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial(\partial_\mu q)}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial q}{\partial x^\mu}\right].$$

Затем перепишем левую часть в виде

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = g^\nu_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$$

и перенесем направо, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu q)}\frac{\partial q}{\partial x^\mu} - g^\nu_\mu \mathcal{L}\right\} = 0,$$

ч. т. д.

Аналогично можно показать, что из изотропии пространства следует сохранение момента импульса поля.

3.2.3. Калибровочное преобразование первого рода и сохранение заряда

Пусть $\mathcal{L}$ зависит от комплексного скалярного поля $q_1 = \varphi(x)$ и $q_2 = \varphi^*(x)$, а также от $\partial_\mu\varphi$ и $\partial_\mu\varphi^*$ так, что $\mathcal{L}(q, \partial_\mu q)$ не изменяется при замене полей

$$\varphi(x) \to e^{i\alpha}\varphi(x), \quad \varphi^*(x) \to e^{-i\alpha}\varphi^*(x),$$

где α — вещественное число. Конечно, при этом не изменяется и вид действия.

В этом случае $\delta S = 0$ при

$$\delta x_\mu = 0\,, \ \ \delta\varphi(x) = i\varepsilon\varphi(x)\,, \ \ \delta\varphi^*(x) = -i\varepsilon\varphi^*(x)\,,$$

где $\varepsilon = \delta\alpha \to 0$. При этом

$$\delta\Theta^\mu = \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\varphi^*\right] i\varepsilon$$

и теорема Нётер гарантирует, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\Theta^\mu = 0.$$

Покажем это, учитывая, что $\delta\mathcal{L} = 0$ при указанных вариациях, т. е.

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)}\delta(\partial_\mu q_i)\right] = \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)}\right]\delta q_i + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)}\delta q_i\right]. \end{aligned}$$

Первая квадратная скобка $[\ldots] = 0$ в силу уравнений движения, а второе слагаемое даёт необходимый результат.

Итак, если ввести 4-вектор

$$j^\mu = -i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\varphi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\varphi^*\right),$$

то

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

и

$$\int j_0 d^3r = Q = \text{const}.$$

Величина Q — это заряд (не обязательно электрический, например, барионный).

§4. Действительное скалярное поле $\Phi(x) = \Phi^*(x)$

Плотность функции Лагранжа действительного скалярного поля выбираем так

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - m^2\Phi^2\right),$$

чтобы уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} = \partial_\mu\partial^\mu\Phi + m^2\Phi = 0$$

совпадало с уравнением Клейна-Фока-Гордона[4]

$$\left(\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu - m^2\right)\Phi = 0$$

(напомним, что $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$).

Проведём разложение в ряд Фурье аналогично тому, как это было сделано для электромагнитного поля,

$$\Phi(x) = \sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}\left[a_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{pr}} + a^*_{\mathbf{p}}(t)e^{-i\mathbf{pr}}\right].$$

[4] Свойства этого уравнения обсуждаются в § B.

Из уравнений движения
$$\ddot{a}_{\mathbf{p}}(t) + (\mathbf{p}^2 + m^2)\, a_{\mathbf{p}}(t) = 0$$
получим соотношение $E^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m^2$ и зависимость амплитуд $a_{\mathbf{p}}(t)$ от времени
$$a_{\mathbf{p}}(t) \propto e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \quad a^*_{\mathbf{p}}(t) \propto e^{i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}\,, \ \ \varepsilon_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Нормировочный коэффициент $N_{\mathbf{p}}$ выбираем из условия нормировки на одну частицу в объёме $\mathcal{V}$ (см. ($B.2b$)):
$$N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\,.$$
Покажем, что при таком выборе
$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\,.$$
Для этого найдём плотность энергии
$$T^{00} = \frac{1}{2}\left[\dot{\Phi}^2 + (\nabla\Phi)^2 + m^2\Phi^2\right]\,.$$
Эта величина оказывается положительно определённой: $T^{00} \geq 0$. Энергию поля представим в виде
$$\begin{aligned} E \ &= \ \int T^{00} d^3r = \frac{1}{2}\int d^3r \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}\prime} N_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}\prime} \left\{ \left(a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}} - a^*_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{pr}}\right)\left(a_{\mathbf{p}\prime} e^{i\mathbf{p}\prime\mathbf{r}} - a^*_{\mathbf{p}\prime} e^{-i\mathbf{p}\prime\mathbf{r}}\right) \times \right. \\ & \left. (-\varepsilon_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}\prime} - \mathbf{p}\mathbf{p}\prime) + m^2 \left(a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}} + a^*_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{pr}}\right)\left(a_{\mathbf{p}\prime} e^{i\mathbf{p}\prime\mathbf{r}} + a^*_{\mathbf{p}\prime} e^{-i\mathbf{p}\prime\mathbf{r}}\right)\right\}\,. \end{aligned}$$
Учитывая, что $\int e^{i\mathbf{pr}} e^{-i\mathbf{p}\prime\mathbf{r}}\, d^3r = \mathcal{V}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}\prime}$, получим
$$E = \sum_{\mathbf{p}} N^2_{\mathbf{p}} 2\varepsilon^2_{\mathbf{p}} \mathcal{V} a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\,.$$
Аналогичные выкладки справедливы и для
$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\, a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\,.$$

Процедура квантования сведётся к заменам
$$a_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{a}_{\mathbf{p}}\,, \ \ a^*_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,,$$
при этом
$$E \to \hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathbf{p}}\left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\right)\,.$$
Правила квантования для осцилляторов поля, соответствующие статистике Бозе-Эйнштейна
$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^+_{\mathbf{p}\prime}\right] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}\prime}, \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}\prime}\right] = \left[\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \hat{a}^+_{\mathbf{p}\prime}\right] = 0$$

приводят к разумному результату:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \left(\hat{n}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right),$$

где оператор числа квантов

$$\hat{n}_{\mathbf{p}} = \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}$$

имеет собственные значения $0, 1, 2, 3, \ldots$. Отсчитывая энергию от бесконечной суммы $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}$, получим

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \, \hat{n}_{\mathbf{p}} \,,$$

Аналогично,

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \, \hat{n}_{\mathbf{p}} \,.$$

Отсюда видно, что $\hat{n}_{\mathbf{p}}$ имеет смысл оператора числа квантов с энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и импульсом $\mathbf{p}$.

Если бы мы выбрали правила квантования, соответствующие статистики Ферми, т. е. $\left\{ \hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^{+}_{\mathbf{p'}} \right\} = \delta_{\mathbf{pp'}}$, то оператор $\hat{H}$ вообще не зависил бы от $\hat{n}_{\mathbf{p}}$.

В гайзенберговском представлении

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}} + \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}} \right),$$

$$px = \varepsilon_{\mathbf{p}} t - \mathbf{pr}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

причем, волновая функция

$$\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}}$$

соответствует одной частице во всём объёме $\mathcal{V}$.

§5. Комплексное скалярное поле $\varphi(x) \neq \varphi^*(x)$

Как и выше, плотность функции Лагранжа комплексного скалярного поля выбираем так

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \,,$$

чтобы уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* + m^2 \varphi^* = 0$$

совпадали с уравнением Клейна-Фока-Гордона для функций $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$.

Далее находим

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi^* \partial^\nu \varphi + \partial^\nu \varphi^* \partial^\mu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L},$$

плотность энергии поля

$$T^{00} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + (\nabla\varphi^*)(\nabla\varphi) + m^2 \varphi^* \varphi \geq 0,$$

энергию поля $E = \int T^{00}\, d^3r$, импульс поля $P^n = \int T^{n0}\, d^3r$, ток

$$j_\mu = i\left[\varphi^* \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi^*)\,\varphi\right], \quad j_0 = i\left(\varphi^* \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \varphi\right),$$

и заряд поля

$$Q = \int j_0 d^3 r.$$

Проведем разложение по плоским волнам без условия действительности функции $\varphi(x)$, т. е.

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}} \left(a_{\mathbf{p}}(t)\, e^{i\mathbf{pr}} + \widetilde{a}_{\mathbf{p}}(t)\, e^{-i\mathbf{pr}}\right), \quad N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}},$$

причём $\widetilde{a}_{\mathbf{p}}(t) \neq a^*_{\mathbf{p}}(t)$, но как и выше

$$a_{\mathbf{p}}(t) \propto e^{-i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}, \quad \widetilde{a}_{\mathbf{p}}(t) \propto e^{+i\varepsilon_{\mathbf{p}} t}.$$

При квантовании $a_{\mathbf{p}}(t)$ переходит в $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения частицы, но $\widetilde{a}_{\mathbf{p}}(t)$ переходит в оператор рождения другой частицы, поэтому мы обозначим его через $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$, таким образом

$$a_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad \widetilde{a}_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{b}^+_{\mathbf{p}},$$

$$a^*_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \quad \widetilde{a}^*_{\mathbf{p}}(t) \to \hat{b}_{\mathbf{p}}.$$

В итоге операторы поля в гайзенберговском представлении имеют вид:

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\right), \tag{5.1a}$$

$$\hat{\varphi}^+(x) = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\right), \tag{5.1b}$$

а операторы энергии, импульса и оператор заряда таковы:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}^+_{\mathbf{p}}\right), \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}^+_{\mathbf{p}}\right), \quad \hat{Q} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}^+_{\mathbf{p}}\right).$$

Как и в предыдущем разделе, используем правила квантования, соответствующие статистике Бозе-Эйнштейна:

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\right] = \delta_{\mathbf{pp}'}, \quad \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^+_{\mathbf{p}}\right] = \delta_{\mathbf{pp}'},$$

а все остальные пары операторов коммутируют

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{b}^+_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \hat{b}^+_{\mathbf{p}'}\right] = 0,$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}, \hat{b}_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \hat{a}^+_{\mathbf{p}'}\right] = \left[\hat{b}^+_{\mathbf{p}}, \hat{b}^+_{\mathbf{p}'}\right] = 0.$$

В этом случае получим (отбрасывая бесконечные константы)

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \left(\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{\bar{n}}_{\mathbf{p}}\right) , \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \left(\hat{n}_{\mathbf{p}} + \hat{\bar{n}}_{\mathbf{p}}\right) , \quad Q = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{n}_{\mathbf{p}} - \hat{\bar{n}}_{\mathbf{p}}\right) ,$$

где

$$\hat{n}_{\mathbf{p}} = \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}$$

— операторы числа частиц сорта a, а

$$\hat{\bar{n}}_{\mathbf{p}} = \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}$$

— операторы числа частиц сорта b. Отсюда видно, что частицы сорта a (b) имеют энергию $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ ($\varepsilon_{\mathbf{p}}$), импульс $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$), заряд $+1$ (-1). Частицы сорта b называются *античастицами*. В разложении (1) волновая функция

$$\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}$$

соответствует одной частице во всем объёме $\mathcal{V}$.

§6. C, P, T-преобразования комплексного скалярного поля

C-**преобразование** — зарядовое (C — charge) преобразование определяется соотношениями

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to \hat{b}_{\mathbf{p}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \to \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}, \quad \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} \to \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}},$$

т. е. частицы заменяются на античастицы и наоборот. При этом

$$\hat{\varphi}\,(x) \to \hat{\varphi}^{C}\,(x) = \hat{\varphi}^{+}\,(x)\,. \tag{6.1}$$

P-**преобразование** — пространственная инверсия (P — parity) — отражение трёх осей $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, при этом

$$\varphi\,(t, \mathbf{r}) \to \varphi^{P}\,(t, \mathbf{r}) = \eta_P \varphi\,(t, -\mathbf{r})\,,$$

где η_P — фазовый множитель. Двойное применение операции P даёт $\eta_P^2 \varphi\,(t, \mathbf{r}) = \varphi\,(t, \mathbf{r})$, т. е. $\eta_P = \pm 1$. Если $\eta_P = +1$ поле называется *скалярным*, если $\eta_P = -1$ поле называется *псевдоскалярным*.

Преобразование операторов поля:

$$\hat{\varphi}\,(t, \mathbf{r}) \to \hat{\varphi}^{P}\,(t, \mathbf{r}) = \eta_P \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i(\varepsilon_{\mathbf{p}} t + \mathbf{pr})} + \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} e^{i(\varepsilon_{\mathbf{p}} t + \mathbf{pr})}\right)$$

Изменим знак индекса суммирования $\mathbf{p}$, тогда

$$\hat{\varphi}^{P}\,(t, \mathbf{r}) = \eta_P \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} \left(\hat{a}_{-\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}^{+}_{-\mathbf{p}} e^{ipx}\right), \quad px = \varepsilon_{\mathbf{p}} t - \mathbf{pr},$$

т. е.

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to \eta_P \hat{a}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} \to \eta_P \hat{b}^{+}_{-\mathbf{p}},$$

аналогично

$$\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \to \eta_P \hat{a}^+_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \eta_P \hat{b}_{-\mathbf{p}}.$$

Отсюда — операторы рождения (уничтожения) частиц и античастиц преобразуются одинаково, т. е. **внутренние чётности частиц и античастиц скалярного поля одинаковы**.

Преобразования Лоренца: $x \to x' = \hat{\Lambda} x$, или $x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu$, матрица Λ^ν_μ зависит непрерывным образом от параметров группы Лоренца — углов поворота в шести плоскостях xy, yz, zx, tx, ty, tz. Определитель этой матрицы $\det\left(\Lambda^\nu_\mu\right) = +1$. Скалярная (и псевдоскалярная) функция не изменится при таком преобразовании:

$$\varphi(x) \to \varphi^\Lambda(x) = \varphi\left(\hat{\Lambda}^{-1} x\right).$$

Отражение всех четырёх осей $x \to x' = -x$ имеет $\det\left(\Lambda^\nu_\mu\right) = +1$ и формально-математически может быть отнесено к непрерывным преобразованиям, поэтому для него

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = +\varphi(-t, -\mathbf{r}) \ .$$

Для операторов поля отсюда получим

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to \hat{b}^+_{\mathbf{p}}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \to \hat{a}^+_{\mathbf{p}},$$

т. е. это преобразование включает также и замену частиц античастицами.

T **(time)-преобразование** — отражение времени $t \to -t$. В квантовой механике уравнение Шрёдингера $i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$ не изменяет своего вида, если одновременно с изменением знака t сделать комплексное сопряжение, т. е. $t \to -t$ и $\Psi \to \Psi^*$. Поэтому

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) \to \hat{\varphi}^T(t, \mathbf{r}) = \eta_T \hat{\varphi}^+(-t, \mathbf{r}),$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \to \eta_T \hat{a}^+_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \to \eta_T \hat{b}_{-\mathbf{p}}.$$

Если далее сделать C и P преобразования, то

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) \to \hat{\varphi}^{PCT}(t, \mathbf{r}) = \eta_P \eta_T \hat{\varphi}(-t, -\mathbf{r}),$$

т. е. фактически это будет преобразование $x \to -x$ с определителем $+1$, поэтому $\hat{\varphi}^{PCT}(t, \mathbf{r}) = \hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$, т. е. $\eta_P \eta_T = +1$, $\eta_T = \eta_P = \pm 1$.

§7. C, P, T-преобразования для электромагнитного поля

Для полноты приведём очевидные формулы C, P и T-преобразования для электромагнитного поля:

$$A^C_\mu(x) = -A_\mu(x) \ ,$$

$$A^P_0(t, \mathbf{r}) = A_0(t, -\mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^P(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{A}(t, -\mathbf{r}) \ ,$$

$$A^T_0(t, \mathbf{r}) = A_0(-t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^T(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{A}(-t, \mathbf{r}) \ .$$

Отсюда, в частности следует, что конечные состояния в $\gamma\gamma$-соударениях имеют положительную C-чётность. Напротив, если конечные состояния в e^+e^- аннигиляции образуются через однофотонное виртуальное состояние, то они имеют отрицательную C-чётность.

§8. Спинорное поле Дирака

Легко проверить, что при выборе плотности функции Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}\left(\Psi(x),\,\overline{\Psi}(x),\,\partial_\mu\Psi(x),\,\partial_\mu\overline{\Psi}(x)\right)=\frac{1}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma_\mu\,i\partial^\mu\Psi-(i\partial^\mu\overline{\Psi})\gamma_\mu\Psi\right]-m\overline{\Psi}\Psi,$$

уравнение Лагранжа совпадает с уравнением Дирака, свойства которого подробно обсуждаются в § C—§ F. В частности, в § E было показано, что волновые функции

$$\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}u_{\mathbf{p}\sigma}\ \text{ и }\ \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}v_{\mathbf{p}\sigma}$$

образуют полный набор, нормировка этих волновых функций соответствует одной частицы в объёме $\mathcal{V}$. Разлагая по этим функциям операторы спинорного поля так же, как это было сделано для комплексного скалярного поля, получим

$$\hat{\Psi}\left(x\right)=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}u_{\mathbf{p}\sigma}+\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}v_{\mathbf{p}\sigma}\right),$$

$$\hat{\overline{\Psi}}\left(x\right)=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\left(\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\overline{u}_{\mathbf{p}\sigma}+\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\overline{v}_{\mathbf{p}\sigma}\right).$$

Здесь $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}$ $(\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma})$ — оператор рождения (уничтожения) свободной частицы с импульсом $\mathbf{p}$, энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}=+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ и поляризацией σ, а $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}$ $(\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma})$ — оператор рождения (уничтожения) свободной античастицы с импульсом $\mathbf{p}$, энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}=+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ и поляризацией σ.

Энергию поля удобно рассчитать, стартуя от гамильтоновой формы уравнения Дирака (см. § C.5):

$$E=\int\Psi^{+}\,i\frac{\partial\Psi\left(x\right)}{\partial t}d^3r=\int\overline{\Psi}\gamma^0 i\frac{\partial\Psi\left(x\right)}{\partial t}d^3r\,.$$

Далее обычным образом получим

$$E\to\hat{H}=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\varepsilon_{\mathbf{p}}\left(\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}-\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\right).$$

При выводе последнего равенства использовались нормировка и ортогональность биспиноров (см. (E.3), (E.8), (E.11)) и соотношения (E.12), что даёт:

$$\overline{u}_{\mathbf{p}\sigma}\gamma^0u_{\mathbf{p}\sigma'}=2\varepsilon_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'},\quad\overline{v}_{\mathbf{p}\sigma}\gamma^0v_{\mathbf{p}\sigma'}=2\varepsilon_{\mathbf{p}}\delta_{\sigma\sigma'},$$

$$\overline{u}_{\mathbf{p}\sigma}\gamma^0v_{-\mathbf{p}\sigma'}=\overline{v}_{\mathbf{p}\sigma}\gamma^0u_{-\mathbf{p}\sigma'}=0,$$

Чтобы выражение для $\hat{H}$ имело смысл, необходимо квантовать по Ферми-Дираку:

$$\left\{\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma},\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\right\}=1,\quad\left\{\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma},\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\right\}=1,$$

а все остальные пары операторов $\hat{a}$, $\hat{a}^{+}$, $\hat{b}$, $\hat{b}^{+}$ антикоммутируют. В этом случае

$$\hat{H}=\sum_{\mathbf{p}\sigma}\varepsilon_{\mathbf{p}}\left(\hat{n}_{\mathbf{p}\sigma}+\hat{\overline{n}}_{\mathbf{p}\sigma}-1\right)\,,\ \ \hat{n}_{\mathbf{p}\sigma}=\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\,,\ \ \hat{\overline{n}}_{\mathbf{p}\sigma}=\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{b}_{\mathbf{p}\sigma}\,,$$

а для заряда

$$Q = \int j^0(x)\, d^3r = \int \overline{\Psi}(x)\, \gamma^0 \Psi(x)\, d^3r$$

аналогично

$$Q \to \hat{Q} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} + \hat{b}_{\mathbf{p}\sigma} \hat{b}^+_{\mathbf{p}\sigma} \right) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\hat{n}_{\mathbf{p}\sigma} - \hat{\overline{n}}_{\mathbf{p}\sigma} + 1 \right),$$

где $\hat{n}_{\mathbf{p}\sigma}$ — оператор числа частиц, а $\hat{\overline{n}}_{\mathbf{p}\sigma}$ — оператор числа античастиц.

§ 9. Представление взаимодействия

Напомним, что в *шрёдингеровском представлении* операторы физических величин не зависят от времени, а зависящий от времени вектор состояния $\Psi(t)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(t).$$

Разложим $\Psi(t)$ по стационарным состояниям $\Psi_n(0)$, таким, что $\hat{H}\Psi_n(0) = E_n \Psi_n(0)$, тогда

$$\Psi(t) = \sum_n c_n \Psi_n(0)\, e^{-iE_n t}. \tag{9.1}$$

Так как

$$e^{-i\hat{H}t} \Psi_n(0) = e^{-iE_n t} \Psi_n(0),$$

то (1) можно представить в компактном виде

$$\Psi(t) = \hat{U}(t) \sum_n c_n \Psi_n(0) = \hat{U}(t)\, \Psi(0), \tag{9.2}$$

где унитарный оператор

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} \tag{9.3}$$

полностью определяет зависимость вектора состояния от времени.

Используя соотношение (2), среднее значение оператора $\hat{A}$

$$\langle A(t) \rangle = \left\langle \Psi(t) \,|\hat{A}| \Psi(t) \right\rangle,$$

можно переписать в таком виде

$$\langle A(t) \rangle = \left\langle \Psi(0) \,|\hat{A}_\Gamma(t)|\, \Psi(0) \right\rangle, \quad \hat{A}_\Gamma(t) = \hat{U}^{-1}(t)\, \hat{A} \hat{U}(t), \tag{9.4}$$

в котором от времени зависит оператор $\hat{A}_\Gamma(t)$, а вектор состояния $\Psi(0)$ не зависит от времени. Такая картина развития системы во времени называется *гайзенберговским представлением.*

Пусть

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V},$$

где $\hat{V}$ — взаимодействие. Если взаимодействие можно рассматривать как малое возмущение, то строительство теории возмущений удобно производить в *представлении* *взаимодействия*, которое определяется так. Введем новый унитарный оператор развития

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t} \tag{9.5}$$

и новый вектор состояния

$$\Phi(t) = \hat{U}_0^{-1}(t)\,\Psi(t)\ .$$

Этот вектор состояния подчиняется уравнению

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = i\frac{\partial\hat{U}_0^{-1}(t)}{\partial t}\Psi(t) + i\hat{U}_0^{-1}(t)\,\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = -U_0^{-1}(t)\,\hat{H}_0\Psi(t) + U_0^{-1}(t)\,\hat{H}\Psi(t)$$

или

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \hat{V}(t)\,\Phi(t)\ , \tag{9.6}$$

где

$$\hat{V}(t) = \hat{U}_0^{-1}(t)\,\hat{V}\hat{U}_0(t)\ .$$

Представление взаимодействия очень удобно по следующим соображениям:

- при $\hat{V} = 0$ оно переходит в гайзенберговское представление, которое мы использовали до сих пор для ковариантного описания операторов полей;
- вектор состояния $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению (6), в котором правая часть содержит малый параметр, что очень удобно для построения теории возмущений.

§ 10. Инвариантная теория возмущений

В предыдущем параграфе формальное решение уравнения Шрёдингера $i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(t)$ было получено в компактном виде

$$\Psi(t) = e^{-i\hat{H}t}\Psi(0)\,,$$

используя разложение $\Psi(0)$ по стационарным состояниям. Этот же ответ можно получить иначе. Временной интервал от 0 до t разобьём на маленькие участки δt_α. На участке от t_α до $(t_\alpha + \delta t_\alpha)$ можно записать

$$\Psi(t_\alpha + \delta t_\alpha) = e^{-i\hat{H}\delta t_\alpha}\Psi(t_\alpha)\,.$$

Повторяя эту процедуру, получим

$$\Psi(t) = \prod_\alpha e^{-i\hat{H}\delta t_\alpha}\Psi(0)\,.$$

Пользуясь тем, что операторы $e^{-i\hat{H}\delta t_\alpha}$ и $e^{-i\hat{H}\delta t_\beta}$ коммутируют, перепишем

$$\prod_\alpha e^{-i\hat{H}\delta t_\alpha} = e^{-i\hat{H}\sum\limits_\alpha \delta t_\alpha} = e^{-i\hat{H}t} = \hat{U}(t)\ .$$

Так же можно действовать и при решении уравнения для вектора состояния в представлении взаимодействия $\Phi(t)$, для которого $i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = \hat{V}(t)\,\Phi(t)$. Именно, интервал от начального времени t_i до конечного t_f разобьем на малые участки δt_α, при этом как и выше

$$\Phi\left(t_\alpha+\delta t_\alpha\right)=e^{-i\hat{V}(t_\alpha)\delta t_\alpha}\Phi\left(t_\alpha\right)\,.$$

Повторяя эту процедуру, получим

$$\Phi\left(t_f\right)=\prod_\alpha e^{-i\hat{V}(t_\alpha)\delta t_\alpha}\Phi\left(t_i\right)\,.$$

Существенная разница с предыдущим заключается в следующем: операторы $\hat{V}\left(t_\alpha\right)$ и $\hat{V}\left(t_\beta\right)$, вообще говоря, не коммутируют друг с другом. Введем формально оператор упорядочивания по времени $\hat{T}$, под знаком этого оператора можно переписать

$$\prod_\alpha e^{-i\hat{V}(t_\alpha)\,\delta t_\alpha}=\hat{T}e^{-i\sum\limits_\alpha\hat{V}(t_\alpha)\,\delta t_\alpha}=\hat{T}e^{-i\int\limits_{t_i}^{t_f}\hat{V}(t)\,dt}=\hat{U}\,.$$

Конструктивный смысл этому формальному выражению можно придать, разложив экспоненту в ряд и проведя в полученных многократных интегралах упорядочивание по t_k,

$$\hat{U}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\hat{T}\int\limits_{t_i}^{t_f}\hat{V}\left(t_1\right)dt_1\ldots\int\limits_{t_i}^{t_f}\hat{V}\left(t_n\right)dt_n.$$

Если теперь устремить $t_i\to-\infty$, $t_f\to\infty$, то

$$\hat{U}\to\hat{S}=\hat{T}e^{-i\int\hat{V}(t)dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\hat{T}\int\hat{V}\left(t_1\right)dt_1\ldots\int\hat{V}\left(t_n\right)dt_n.$$

Элементы S-матрицы, соответствующие переходу из начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$, суть матричные элементы

$$S_{fi}=\langle f|\,\hat{S}\,|i\rangle\,.$$

Пример КЭД:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left\{\overline{\Psi}\gamma_\mu\left(i\partial^\mu-eA^\mu\right)\Psi+\left[\left(-i\partial^\mu-eA^\mu\right)\overline{\Psi}\right]\gamma_\mu\Psi\right\}-m\overline{\Psi}\Psi,$$

так что плотность функции Лагранжа, соответствующая взаимодействию электронов и фотонов, имеет вид:

$$\mathcal{L}_I=-e\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x)A^\mu(x)$$

(если частица — электрон, то $e<0$). В итоге в КЭД

$$\hat{V}\left(t\right)=-\int\mathcal{L}_Id^3r=\int\hat{V}(x)d^3r\,,\quad\hat{V}(x)=e\hat{\overline{\Psi}}(x)\left(x\right)\gamma_\mu\hat{\Psi}\left(x\right)\hat{A}^\mu\left(x\right)$$

и

$$\hat{S}=\hat{T}e^{-i\int\hat{V}(x)\,d^4x}=\hat{T}e^{-ie\int\hat{\overline{\Psi}}(x)\gamma_\mu\hat{\Psi}(x)\hat{A}^\mu(x)\,d^4x}$$

— унитарный, релятивистски инвариантный оператор. Так как константа электромагнитного взаимодействия $|e|=\sqrt{\alpha}$ мала, теория возмущений оказывается очень эффективным способом расчетов в КЭД.

Пример скалярных полей — взаимодействие комплексного скалярного поля $\varphi(x)$ и действительного скалярного поля $\Phi(x)$:

$$\hat{S} = \hat{T} e^{-ig \int \hat{\phi}^{+}(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\Phi}(x)\, d^4x},$$

где g — константа взаимодействия.

Взаимодействие спинорного поля $\Psi(x)$ *и действительного скалярного поля* $\Phi(x)$:

$$\hat{S} = \hat{T} e^{-ig \int \hat{\overline{\Psi}}(x)\hat{\Psi}(x)\hat{\Phi}(x)\, d^4x}.$$

§ 11. Амплитуды и вероятности переходов

11.1. Амплитуда рассеяния

Рассмотрим переход из начального состояния $|i\rangle$ с суммарным 4-импульсом $P_i = \sum_i p_i$ в конечное состояние $|f\rangle$ с $P_f = \sum_f p'_f$ (рис. 5). Амплитуда вероятности такого перехода $\langle f|\,\hat{S}\,|i\rangle = S_{fi}$ — матричный элемент оператора перехода $\hat{S}$, в теории возмущений этот оператор имеет вид

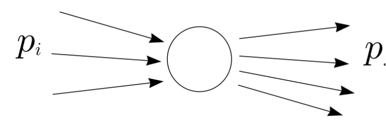


Рис. 5. Переход $|i\rangle \to |f\rangle$

$$\hat{S} = \hat{T} e^{-i \int \hat{V}(x) d^4x},$$

где $\hat{V}(x)$ — плотность оператора возмущения. Удобно выделить из S_{fi} тривиальный вклад, δ_{fi}, а в остатке в явном виде учесть закон сохранения 4-импульса:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,(2\pi)^4\,\delta\,(P_i - P_f)\,T_{fi}.$$

Пусть начальному состоянию отвечает время t_i, а конечному — время t_f (затем $t_i \to -\infty$, $t_f \to \infty$) и пусть $\Delta t = t_f - t_i$, тогда вероятность перехода в единицу времени при $|i\rangle \neq |f\rangle$ равна

$$d\dot{W}_{i\to f} = \frac{|S_{fi}|^2}{\Delta t} \prod_f \frac{\mathcal{V} d^3 p'_f}{(2\pi)^3} = \left[(2\pi)^4\,\delta\,(P_i - P_f)\right]^2 \frac{|T_{fi}|^2}{\Delta t} \prod_f \frac{\mathcal{V} d^3 p'_f}{(2\pi)^3}.$$

Квадрат δ-функции в этом выражении может быть расшифрован следующим образом:

$$(2\pi)^4\,[\delta\,(P_i - P_f)]^2 = \delta\,(P_i - P_f)\cdot(2\pi)^4\delta(0)$$

и далее

$$(2\pi)^4\delta(0) = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt \int\limits_{\mathcal{V}} d^3r\, e^{i\left(P_i - P_f\right)x}\Big|_{P_i = P_f} = \mathcal{V}\Delta t.$$

Таким образом,

$$d\dot{W}_{i\to f} = (2\pi)^4\delta\,(P_i - P_f)\ \mathcal{V}\,|T_{fi}|^2 \prod_f \frac{\mathcal{V} d^3 p'_f}{(2\pi)^3}.$$

Число состояний $\dfrac{\mathcal{V} d^3 p'_f}{(2\pi)^3}$ соответствует нормировке на одну частицу во всём объёме $\mathcal{V}$. Это отвечает волновой функции

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} & \text{для скалярных частиц,} \\
\dfrac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{V}}}\sqrt{4\pi}\, e^{\mu}_{\mathbf{k}\lambda} & \text{для фотона}\,, \\
\dfrac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\, u_{\mathbf{p}\sigma} & \text{для электрона}\,.
\end{array}
$$

Удобно вынести множитель $\dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}$ для всех частиц, введя новую величину *амплитуду рассеяния* M_{fi}:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,(2\pi)^4\,\delta\,(P_i - P_f)\; M_{fi} \prod_{if} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}.$$

11.2. Ширина распада

Вероятность распада частицы в единицу времени или *ширина распада* равна

$$d\dot{W}_{i\to f} \equiv d\Gamma_{i\to f} = (2\pi)^4\,\delta\,(p - P_f)\,\frac{\mathcal{V}}{2\varepsilon\mathcal{V}}|M_{fi}|^2 \prod_f \frac{d^3 p'_f}{2\varepsilon'_f\,(2\pi)^3}.$$

Вспомогательное понятие, объём $\mathcal{V}$, исчезло из этого выражения.

Если идёт распад в системе покоя начальной частицы с массой m на две частицы с энергиями $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = m$ и импульсами $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2$ (рис. 6), то

$$d\Gamma_{i\to f} = \frac{|M_{fi}|^2}{32\pi^2 m^2}|\mathbf{p}'_1|\,d\Omega'_1.$$

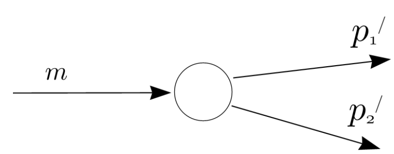


Рис. 6. Кинематика распада

11.3. Сечение рассеяния

Две частицы, соударяясь, переходят в конечное состояние из n частиц (рис. 7). Вероятность такого перехода в единицу времени равна

$$d\dot{W}_{i\to f} = (2\pi)^4\,\delta\,(p_1 + p_2 - P_f)\,\frac{|M_{fi}|^2}{2\varepsilon_1\mathcal{V}2\varepsilon_2\mathcal{V}}\mathcal{V}\prod_f \frac{d^3 p'_f}{2\varepsilon'_f\,(2\pi)^3}$$

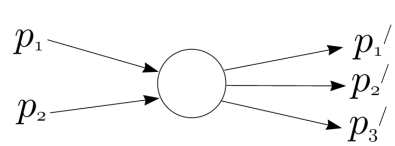


Рис. 7. Кинематика рассеяния

Сечение

$$d\sigma = \frac{d\dot{W}}{j},$$

где j — плотность потока. При нормировки на одну частицу в объёме $\mathcal{V}$ плотность потока в с.ц.и. равна

$$j = \frac{v_1}{\mathcal{V}} + \frac{v_2}{\mathcal{V}} = \frac{1}{\mathcal{V}}\left(\frac{|\mathbf{p}_1|}{\varepsilon_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{\varepsilon_2}\right) = \frac{|\mathbf{p}_1|\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\mathcal{V}\varepsilon_1\varepsilon_2}\,.$$

В сечении объём $\mathcal{V}$ исчезает:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta\left(p_1 + p_2 - P_f\right) \frac{|M_{fi}|^2}{4I} \prod_f \frac{d^3 p'_f}{2\varepsilon'_f (2\pi)^3},$$

где $I = |\mathbf{p}_1| \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) = \sqrt{\left(p_1 p_2\right)^2 - m_1^2 m_2^2}$ — инвариант Мёллера.

Для частного случая $p_1 + p_2 \to p'_1 + p'_2$ имеем в с.ц.и.

$$d\sigma = \left|\frac{M_{fi}}{8\pi\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)}\right|^2 \frac{|\mathbf{p}'_1|}{|\mathbf{p}_1|} d\Omega'_1.$$

Если вести переменную $t = \left(p_1 - p'_1\right)^2$, то

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi} \frac{d\left(-t\right)}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

§12. Первый порядок теории возмущений

12.1. Взаимодействие $g\hat{\varphi}^+\hat{\varphi}\hat{\Phi}$

Рассмотрим взаимодействие частиц комплексного скалярного поля $\varphi\left(x\right)$ и действительного скалярного поля $\Phi\left(x\right)$. Для него оператор $\hat{S}$ в первом порядке имеет вид

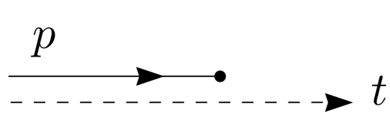
$$\hat{S}^{(1)} = -ig \int d^4x \hat{\varphi}^+\left(x\right) \hat{\varphi}\left(x\right) \hat{\Phi}\left(x\right)$$

(здесь нет разных времён и поэтому оператор $\hat{T}$ опущен).

Поле

$$\hat{\varphi}\left(x\right) = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\right),$$

содержит слагаемые, соответствующие уничтожению частицы с 4-импульсом p (оператор $\hat{a}_{\mathbf{p}}$)



или рождению античастицы с 4-импульсом p (оператор $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$)

Поле

$$\hat{\varphi}^+\left(x\right) = \sum_{\mathbf{p}} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}} + \hat{b}_{\mathbf{p}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\right),$$

содержит слагаемые, соответствующие рождению частицы (оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$)

или уничтожению античастицы (оператор $\hat{b}_{\mathbf{p}}$)

Будем условно называть частицы π^-, античастицы π^+.

Поле

$$\hat{\Phi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\varepsilon_k \mathcal{V}}} + \hat{c}^+_{\mathbf{k}} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\varepsilon_k \mathcal{V}}} \right),$$

содержит слагаемые, соответствующие уничтожению нейтральной частицы с 4-импульсом k (оператор $\hat{c}_{\mathbf{k}}$)

или рождению такой же нейтральной частицы с 4-импульсом k (оператор $\hat{c}^+_{\mathbf{k}}$)

Будем кванты поля $\Phi(x)$ условно называть π^0, причем массы m_0 и $m_+ = m_-$ могут быть произвольными.

Таким образом, $\hat{S}^{(1)}$ может описывать процессы

$$\pi^\pm \to \pi^\pm + \pi^0, \quad \pi^\pm + \pi^0 \to \pi^\pm, \quad \pi^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad \pi^+ + \pi^- \to \pi^0 .$$

Пример 1.

Рассмотрим процесс распада $\pi^- \to \pi^- + \pi^0$ (рис. 8), для которого

$$|i\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}} |0\rangle, \quad |f\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}'} \hat{c}^+_{\mathbf{k}} |0\rangle .$$

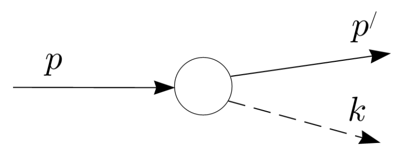


Рис. 8. Распад $\pi^- \to \pi^- + \pi^0$

Матричный элемент S-матрицы равен

$$S^{(1)}_{fi} = -ig \int d^4x \langle 0| \hat{a}_{\mathbf{p}'} \hat{c}_{\mathbf{k}}\, \hat{\varphi}^+(x)\, \hat{\varphi}(x)\, \hat{\Phi}(x)\;\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} |0\rangle = -ig \int F(x)\, f(x)\, d^4x,$$

где функция $F(x)$ соответствует плоской волне конечного π^0:

$$F(x) = \langle 0| \underbrace{\hat{c}_{\mathbf{k}}\, \hat{\Phi}(x)} |0\rangle = \langle 0| \hat{c}_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}'} \frac{e^{-ik'x}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{k}'} \mathcal{V}}} + \hat{c}^+_{\mathbf{k}'} \frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{k}'} \mathcal{V}}} \right) |0\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{V}}}.$$

Здесь мы учли, что

$$\langle 0| \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}'} |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}^+_{\mathbf{k}'} |0\rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

и отметили знаком $\underbrace{\ldots}$ “свёртку” двух операторов.

Аналогично, функция $f(x)$ соответствует плоским волнам начального и конечного π^- и содержит две свёртки:

$$f(x) = \langle 0| \underbrace{\hat{a}_{\mathbf{p}'} \hat{\varphi}^+(x)}\, \underbrace{\hat{\varphi}(x)\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}} |0\rangle = \frac{e^{ip'x}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}'} \mathcal{V}}} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}}.$$

После интегрирования по x получаем

$$S^{(1)}_{fi} = i(2\pi)^4 \delta(p - p' - k) \frac{M^{(1)}_{fi}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V} 2\varepsilon_{\mathbf{p}'} \mathcal{V} 2\varepsilon_{\mathbf{k}} \mathcal{V}}}, \quad M^{(1)}_{fi} = -g,$$

откуда видно, что данный процесс невозможен, т. к. $p \neq p' + k$ (в системе покоя начального π^- его энергия $\varepsilon_i = m_- \neq \varepsilon_f = \varepsilon_{\mathbf{p}'} + \varepsilon_{\mathbf{k}} > m_-$).

Пример 2.

Если рассмотреть процесс распада $\pi^0 \to \pi^+ + \pi^-$ (рис. 9), то получим как и раньше

$$M_{fi}^{(1)} = -g\,,$$

но в данном случае закон сохранения $k = p_+ + p_-$ выполняется, если $m_0 > 2m_-$.

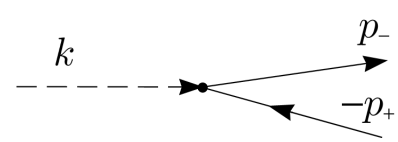


Рис. 9. Распад $\pi^0 \to \pi^+ + \pi^-$

12.2. Взаимодействие $g\hat{\overline{\Psi}}\hat{\Psi}\hat{\Phi}$. Распад хиггсовского бозона

В Стандартной Модели спинорное поле $\Psi\,(x)$ описывает лептон или кварк с массой m, действительное скалярное поле $\Phi(x)$ описывает хиггсовский бозон H с массой m_H, а константа

$$g = \sqrt{4\pi\alpha}\frac{m}{2m_W \sin\theta_W}, \quad m_W = 80,4\,\text{ГэВ}, \quad \sin^2\theta_W = 0,23$$

пропорциональна массе лептона или кварка m.

Рассмотрим процесс (рис. 10)

$$e^- \to e^- + H\,.$$

Повторяя выкладки для процесса $\pi^- \to \pi^- + \pi^0$, получим

$$S_{fi}^{(1)} = -ig\int F\,(x)\,f\,(x)\,d^4x,$$

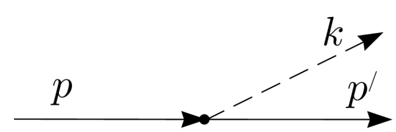


Рис. 10. Переход $e^- \to e^- + H$

где

$$F\,(x) = \langle 0|\,\underbrace{\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{\Phi}\,(x)}\,|0\rangle = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\varepsilon_k\mathcal{V}}},$$

$$f\,(x) = \langle 0|\,\underbrace{\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}\hat{\overline{\Psi}}\,(x)}\,\underbrace{\hat{\Psi}\,(x)\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}}\,|0\rangle$$

и индексы σ (σ') указывают спиновое состояние начального (конечного) электрона.

Учтя, что

$$\hat{\Psi}\,(x) = \sum_{\mathbf{p}''\sigma''}\left(\hat{a}_{\mathbf{p}''\sigma''}u_{\mathbf{p}''\sigma''}\frac{e^{-ip''x}}{\sqrt{2\varepsilon_{p''}\mathcal{V}}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}''\sigma''}v_{\mathbf{p}''\sigma''}\frac{e^{ip''x}}{\sqrt{2\varepsilon_{p''}\mathcal{V}}}\right)$$

и что $\langle 0|\,\hat{a}_{\mathbf{p}''\sigma''}\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\,|0\rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}''}\delta_{\sigma\sigma''}$ и аналогичные соотношения для $\overline{\Psi}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}$, получим

$$f\,(x) = \overline{u}_{\mathbf{p}'\sigma'}u_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{ip'x}}{\sqrt{2\varepsilon_{p'}\mathcal{V}}}\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}.$$

В итоге после интегрирования по x, получим

$$S_{fi}^{(1)} = i\,(2\pi)^4\,\delta\,(p - p' - k)\,\frac{M_{fi}^{(1)}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}2\varepsilon_{p'}\mathcal{V}2\varepsilon_k\mathcal{V}}}, \quad M_{fi}^{(1)} = -g\overline{u}_{\mathbf{p}'\sigma'}u_{\mathbf{p}\sigma}\,.$$

Отсюда видно, что такой процесс невозможен, т. к. $m < m_H + m$.

Распад $H \to e^+e^-$

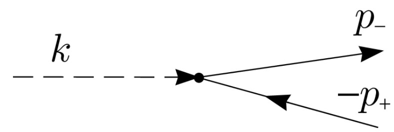


Рис. 11. Распад $H \to e^+e^-$

Этот распад разрешён (рис. 11) и

$$M_{fi}^{(1)} = -g\overline{u}_{\mathbf{p}_-\sigma_-} v_{\mathbf{p}_+\sigma_+}.$$

Найдём ширину распада

$$\Gamma_{H\to e^+e^-} = \int \sum_{\sigma_\pm} |M_{fi}|^2 \frac{d\Omega_-}{32\pi^2 m_H^2}\,|\mathbf{p}_-|\ ,$$

проводя вычисления в системе покоя H-бозона, при этом $\varepsilon_- = \varepsilon_+ = \frac{1}{2}m_H$, $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+$, $|\mathbf{p}_-| = \frac{1}{2}m_H v_e$, где скорость электрона

$$v_e = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{m_H^2}}\,.$$

Поучительно провести прямой расчёт амплитуды рассеяния, выписав в явном виде биспиноры электрона и позитрона:

$$u_{\mathbf{p}_-\sigma_-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_- + m}\,\varphi^{(\sigma_-)} \\ \sqrt{\varepsilon_- - m}\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}_-)\ \varphi^{(\sigma_-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_- + m}\,\varphi^{(\sigma_-)} \\ 2\sigma_-\sqrt{\varepsilon_- - m}\,,\varphi^{(\sigma_-)} \end{pmatrix},$$

$$v_{\mathbf{p}_+\sigma_+} = C\overline{u}_{\mathbf{p}_+\sigma_+} = -i\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_+ - m}\,\varphi^{(-\sigma_+)} \\ 2\sigma_+\sqrt{\varepsilon_+ + m}\,\varphi^{(-\sigma_+)} \end{pmatrix}.$$

Мы учли, что $C = -\alpha_y$, что $-\sigma_y\varphi^{(+\sigma)} = -2i\sigma\varphi^{(-\sigma)}$, и что при выборе оси z вдоль $\mathbf{n}_- = -\mathbf{n}_+$ мы получим

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}_-)\,\varphi^{(\sigma_-)} = 2\sigma_-\varphi^{(\sigma_-)}, \qquad (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}_+)\,\varphi^{(-\sigma_+)} = 2\sigma_+\varphi^{(-\sigma_+)}\,.$$

В итоге получаем:

$$M_{fi}^{(1)} = -ig\sqrt{\varepsilon_-^2 - m^2}\,(1 - 4\sigma_-\sigma_+)\,\varphi^{(\sigma_-)*}\varphi^{(-\sigma_+)} = -igm_H v_e \delta_{\sigma_-,-\sigma_+}\,.$$

Таким образом, проекции спинов электрона и позитрона на выделенную ось z (вдоль направления движения электрона) оказались противоположны, иными словами, спиральности образованных лептонов одинаковы. Это прямое следствие закона сохранения проекции полного момента импульса на ось z.

Теперь легко найти сумму

$$\sum_{\sigma_\pm}\left|M_{fi}^{(1)}\right|^2 = 2g^2 m_H^2 v_e^2\,.$$

Менее громоздкий расчёт этой величины удобно провести, используя правила суммирования по спиновым переменным

$$\sum_{\sigma_\pm}\left|M_{fi}^{(1)}\right|^2 = g^2\,\mathrm{Sp}\left[(p_-^\mu\gamma_\mu + m)(p_+^\nu\gamma_\nu - m)\right]$$

и правила вычисления следов от матриц Дирака:

$$\mathrm{Sp}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}\,,$$

что приводит к результату

$$\sum_{\sigma_\pm} \left| M_{fi}^{(1)} \right|^2 = 4g^2 \, \left(p_+ p_- - m^2 \right) \, ,$$

совпадающему с предыдущим.

Ширина обсуждаемого распада пропорциональна квадрату массы электрона, $g^2 \propto m_e^2$, и оказывается очень малой:

$$\Gamma_{H\to e^+e^-} = \frac{\alpha}{8\sin^2\theta_W} \left(\frac{m_e}{m_W} \right)^2 m_H v_e^3 \, .$$

Если $m_H \approx 115$ГэВ, то возможны лептонные распады $H \to e^+e^-$, или $H \to \mu^+\mu^-$, или $H \to \tau^+\tau^-$, причем ширина последнего распада будет наибольшей.

Среди кварковых мод распада $H \to \overline{q}q$ наибольшую ширину будет иметь $\overline{b}b$ мода:

$$\Gamma_{H\to\bar{b}b} = N_C \frac{\alpha}{8\sin^2\theta_W} \left(\frac{m_b}{m_W} \right)^2 m_H v_b^3 \approx 5\,\text{МэВ}$$

для $N_C = 3$ и $m_b = 5\,$ГэВ (для сравнения $\Gamma_{\phi(1020)} = 4,5\,$МэВ).

При бо̀льших значениях m_H будут доминировать распады $H \to W^+W^-$ и $H \to ZZ$. Интересен распад $H \to \gamma\gamma$ (рис. 12), идущий через виртуальную петлю заряженных частиц, причём неисчезающий петлевой вклад может происходить и от ещё неизвестных тяжёлых частиц X.

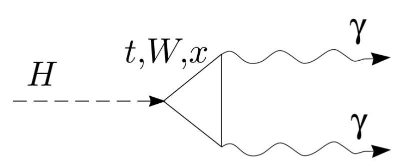


Рис. 12. Распад $H \to \gamma\gamma$

Образование H в e^+e^- и $\mu^+\mu^-$ соударениях

Процесс образования хиггсовского бозона на встречных e^+e^- или $\mu^+\mu^-$ пучках (рис. 13–14) подобен образованию резонансов типа ρ, Φ, ω в e^+e^- соударениях.

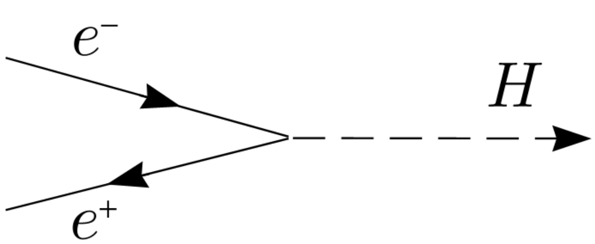


Рис. 13. Процесс $e^+e^- \to H$

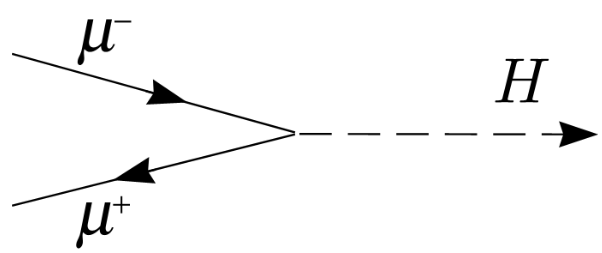


Рис. 14. Процесс $\mu^+\mu^- \to H$

Вероятности переходов $\mu^+\mu^- \to H$ и $e^+e^- \to H$ пропорциональны ширинам соответствующих распадов, отношение этих вероятностей

$$\frac{W(\mu^+\mu^- \to H)}{W(e^+e^- \to H)} = \frac{\Gamma_{H\to\mu^+\mu^-}}{\Gamma_{H\to e^+e^-}} \approx \left(\frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \approx 40\,000 \, ,$$

поэтому на встречных $\mu^+\mu^-$ пучках вероятность образования H будет примерно в 40 000 раз больше, чем на встречных e^+e^- пучках той же энергии. Идея встречных $\mu^+\mu^-$ пучков была выдвинута в работах Будкера (1969) и Скринского и Пархомчука (1981).

12.3. КЭД, взаимодействие $e\hat{\overline{\Psi}}\gamma_\mu\hat{\Psi}\hat{A}^\mu$

В первом порядке теории возмущений мыслимы процессы испускания фотона $e^\pm \to e^\pm + \gamma$, поглощения фотона $e^\pm + \gamma \to e^\pm$, образование e^+e^- пары фотоном $\gamma \to e^+e^-$ и аннигиляция пары $e^+e^- \to \gamma$. Все эти процессы запрещены законами сохранения энергии-импульса. Тем не менее полезно для дальнейшего, вычислить амплитуду M_{fi} этих процессов. Отличие от процессов, рассмотренных в предыдущем разделе для взаимодействия $g\overline{\Psi}\Psi\Phi$, заключается в векторном характере тока $\overline{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ и переходе от действительного скалярного поля Φ к векторному полю A^μ.

При квантовании электромагнитного поля 4-потенциал становился оператором

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda}\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{V}}}\sqrt{4\pi}e^\mu_{\mathbf{k}\lambda} + \hat{c}^+_{\mathbf{k}\lambda}\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{V}}}\sqrt{4\pi}e^{\mu*}_{\mathbf{k}\lambda}\right).$$

Поэтому процессу $e^- \to e^- + \gamma$

соответствует амплитуда рассеяния

$$M^{(1)}_{fi} = -e\overline{u}_{\mathbf{p}'\sigma'}\gamma_\mu u_{\mathbf{p}\sigma}\sqrt{4\pi}e^{\mu*}_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Отметим, что градиентное преобразование 4-потенциала

$$A^\mu(x) \to A^\mu(x) - \partial^\mu f(x)$$

соответствует замене

$$e^\mu_{\mathbf{k}\lambda} \to e^\mu_{\mathbf{k}\lambda} + k^\mu\widetilde{f}(k)\ ,$$

не изменяющей амплитуду рассеяния, т. к.

$$k^\mu\overline{u}'\gamma_\mu u = \left(p_\mu - p'_\mu\right)\overline{u}'\gamma^\mu u = 0 \tag{12.1}$$

в силу уравнения Дирака $p_\mu\gamma^\mu u = mu$ и $p'_\mu\overline{u}'\gamma^\mu = m\overline{u}'$ (само равенство (1) является следствием сохранения тока $\partial_\mu\left(\overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\right) = 0$).

Процессу $\gamma \to e^+ + e^-$

соответствует амплитуда рассеяния

$$M^{(1)}_{fi} = -e\overline{u}_{\mathbf{p}_-\sigma_-}\gamma_\mu v_{\mathbf{p}_+\sigma_+}\sqrt{4\pi}e^\mu_{\mathbf{k}\lambda}.$$

На этих примерах видны правила Фейнмана для КЭД:

	Начальное состояние	Конечное состояние
электрон	$u_{\mathbf{p}\sigma}$	$\bar{u}_{\mathbf{p}\sigma}$
позитрон	$\bar{v}_{\mathbf{p}\sigma}$	$v_{\mathbf{p}\sigma}$
фотон	$\sqrt{4\pi}e^\mu_{\mathbf{k}\lambda}$	$\sqrt{4\pi}e^{*\mu}_{\mathbf{k}\lambda}$

Вершине

соответствует фактор $-ie\gamma^{\mu}$.

В амплитуде рассеяния (iM_{fi}) биспиноры выписываются, следуя от конца электронной линии к началу.

Ещё одно замечание касается случая, когда сплошная линия, соответствующая электрону и идущая от начального состояния до конечного, заменяется позитронной линией. Сравним два процесса. Процессу с электронной линией

соответствует

$$f_{\mu}=\langle 0|\,\underbrace{\hat{a}_{\mathbf{p}'\sigma'}\hat{\overline{\Psi}}(x)}\,\gamma_{\mu}\,\underbrace{\hat{\Psi}(x)\,\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}}\,|0\rangle=\overline{u}_{\mathbf{p}'\sigma'}\gamma_{\mu}u_{\mathbf{p}\sigma}\frac{e^{-i(p-p')x}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}2\varepsilon_{\mathbf{p}'}\mathcal{V}}},$$

а процессу с позитронной линией

соответствует

$$\bar{f}_{\mu}=\langle 0|\,\hat{b}_{\mathbf{p}'\sigma'}\hat{\overline{\Psi}}(x)\,\gamma_{\mu}\hat{\Psi}(x)\,\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\,|0\rangle=-\bar{v}_{\mathbf{p}\sigma}\gamma_{\mu}v_{\mathbf{p}'\sigma'}\frac{e^{-i(p-p')x}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}2\varepsilon'_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}},$$

с дополнительным множителем (-1) из-за антикоммутативности фермионных операторов и другого набора свёрток:

$$\langle 0|\,\underbrace{\hat{b}_{\mathbf{p}'\sigma'}\hat{\overline{\Psi}}(x)\,\gamma_{\mu}\hat{\Psi}(x)}\,\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\,|0\rangle\quad\text{и}\quad\langle 0|\,\hat{b}_{\mathbf{p}'\sigma'}\,\overbrace{\hat{\overline{\Psi}}(x)\,\gamma_{\mu}\hat{\Psi}(x)\,\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}}\,|0\rangle\ .$$

§ 13. Второй порядок теории возмущений для взаимодействия $g\hat{\varphi}^{+}\hat{\varphi}\hat{\Phi}$. Пропагатор скалярной частицы

В операторе

$$\hat{S}^{(2)}=\frac{(-ig)^{2}}{2!}\int d^{4}xd^{4}x'\hat{T}\left[\hat{\varphi}^{+}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,\hat{\Phi}(x)\,\hat{\varphi}^{+}(x')\,\hat{\varphi}(x')\,\hat{\Phi}(x')\right]$$

присутствуют две элементарные вершины:

Процессы с 6 внешними концами соответствуют (после интегрирования по x и x') двум несвязанным процессам типа $\pi^{0}\to\pi^{+}+\pi^{-}$. Процессы с 5 внешними вершинами дают $S^{(2)}_{fi}=0$.

Поэтому во 2 порядке интересно рассмотреть процессы рассеяния частиц

$$\pi^-\pi^\pm \to \pi^-\pi^\pm\,, \quad \pi^0\pi^\pm \to \pi^0\pi^\pm\,, \quad \pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+\,,$$

аннигиляцию заряженных частиц

$$\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$$

и их образование в соударениях нейтральных частиц

$$\pi^0\pi^0 \to \pi^+\pi^-\,.$$

Для описания таких процессов удобны специальные инварианты — переменные Мандельстама.

13.1. Переменные Мандельстама

s-канал. Для описания процесса $1+2\to 3+4$

введём инварианты, составленные из 4-импульсов частиц (*переменные Мандельстама*),

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2\,, \\ t &= (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2\,, \\ u &= (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2\,. \end{aligned}$$

Эти переменные не являются независимыми, т. к.

$$s+t+u = m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2\,.$$

В с.ц.и. этого процесса

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2\,, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$$

инвариант

$$s = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_3+\varepsilon_4)^2$$

совпадает с квадратом полной энергии, а переменные

$$t = -2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 + m_1^2 + m_3^2$$

и

$$u = -2\varepsilon_1\varepsilon_4 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_4 + m_1^2 + m_4^2 = -2\varepsilon_1\varepsilon_4 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 + m_1^2 + m_4^2$$

зависят от угла рассеяния θ:

$$\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|\,\cos\theta\,.$$

Сечение рассеяния

$$d\sigma = \left|\frac{M_{fi}}{8\pi\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)}\right|^2 \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|}\,d\Omega_3 = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi I^2}dt\frac{d\varphi}{2\pi}\,,$$

т. к.

$$d\Omega_3 = \sin\theta d\theta d\varphi = d\left(-\cos\theta\right)d\varphi = \frac{d(-t)d\varphi}{2\,|\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|}\,,\quad |\mathbf{p}_1|\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right) = \sqrt{\left(p_1p_2\right)^2 - m_1^2m_2^2} = I\,.$$

Перекрестный t-канал (кросс-канал): $1+\bar{3}\to\bar{2}+4$

В этом канале переменные Мандельстама имеют вид

$$t = \left(p_1+p_{\bar{3}}\right)^2,\quad s = \left(p_1-p_{\bar{2}}\right)^2,\quad u = \left(p_1-p_4\right)^2\,,$$

инвариант

$$t = \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{\bar{3}}\right)^2$$

совпадает с квадратом полной энергии, а переменные s и u зависят от угла рассеяния в этом канале.

Перекрестный u-канал (кросс-канал): $1+\bar{4}\to 3+\bar{2}$,

В этом канале переменные Мандельстама имеют вид

$$u = \left(p_1+p_{\bar{4}}\right)^2\,,\quad s = \left(p_1-p_{\bar{2}}\right)^2,\quad t = \left(p_1-p_3\right)^2\,,$$

инвариант

$$u = \left(\varepsilon_1+\varepsilon_{\bar{4}}\right)^2$$

совпадает с квадратом полной энергии, а переменные s и t зависят от угла рассеяния в этом канале.

Пример: эффект Комптона

s-канал: $\gamma e^-\to\gamma e^-$

t-канал: $\gamma\gamma \to e^+e^-$

u-канал: $\gamma e^+ \to \gamma e^+$

13.2. Рассеяние заряженных частиц

Рассмотрим процесс

$$\pi^-\pi^- \to \pi^-\pi^- \,,$$

для которого начальное и конечное состояние таковы:

$$|i\rangle = \hat{a}_2^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle \ , \quad |f\rangle = \hat{a}_4^+ \hat{a}_3^+ |0\rangle \ , \ \ \hat{a}_i^+ \equiv \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^+ \, .$$

Так как оператор поля нейтральных частиц $\hat{\Phi}$ коммутируют с операторами полей заряженных частиц $\hat{\varphi}$ и $\hat{\varphi}^+$, то операция упорядочивания по времени $\hat{T}$ может быть произведена отдельно над $\hat{\Phi}(x)\,\hat{\Phi}(x')$ и остальными операторами:

$$S_{fi}^2 = (-ig)^2 \int d^4x d^4x' iD\left(x - x'\right) f\left(x, x'\right),$$

где функция

$$f\left(x, x'\right) = \frac{1}{2!} \langle 0|\, \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{T} \left[\hat{\varphi}^+(x)\,\hat{\varphi}(x)\,\hat{\varphi}^+(x')\,\hat{\varphi}(x')\right] \hat{a}_2^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle$$

соответствует плоским волнам начальных и конечных заряженных частиц, а *пропагатор*

$$iD\left(x - x'\right) = \langle 0|\, \hat{T} \left[\hat{\Phi}(x)\,\hat{\Phi}(x')\right] |0\rangle$$

соответствует распространению нейтральной частицы от точки x' до точки x.

Рассмотрим сначала функцию $f(x, x')$. Будем считать все 4-импульсы $p_{1,2,3,4}$ различными, тогда операторы $\hat{a}_{3,4}$ коммутируют с $\hat{a}_{1,2}^+$. Поэтому операторы $\hat{a}_{1,2}^+$ могут образовать “свертку” (и дать ненулевой вклад) лишь с $\hat{\varphi}(x)$ и $\hat{\varphi}(x')$. Аналонично, $\hat{a}_{3,4}$ могут образовать “свертку” (и дать ненулевой вклад) лишь с $\hat{\varphi}^+(x)$ и $\hat{\varphi}^+(x')$. В итоге, оператор $\hat{T}$ не работает, и его можно опустить.

Начнём перемещать $\hat{a}_2^+$ налево, он даст ненулевой вклад в результате свёртки с $\hat{\varphi}(x')$ или с $\hat{\varphi}(x)$. Учтем первую возможность. После этого $\hat{a}_1^+$ может дать ненулевую свертку лишь с $\hat{\varphi}(x)$. В свою очередь $\hat{a}_3$ "сворачивается"с $\hat{\varphi}^+(x)$ (при этом $\hat{a}_4$ даёт свертку с $\hat{\varphi}^+(x')$) или с $\hat{\varphi}^+(x')$ (при этом $\hat{a}_4$ даёт свертку с $\hat{\varphi}^+(x)$):

$$= \left(\prod_{n=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_n \mathcal{V}}}\right) \left\{ e^{-i(p_1 - p_3)x} e^{-i(p_2 - p_4)x'} + e^{-i(p_1 - p_4)x} e^{-i(p_2 - p_3)x'} \right\} \, .$$

Введем новые переменные интегрирования:

$$X = \frac{x + x'}{2}, \quad z = x - x', \quad d^4 x d^4 x' = d^4 X d^4 z,$$

тогда

$$\{\ldots\} = e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X}\left[e^{-i(p_1-p_3-p_2+p_4)z/2} + e^{-i(p_1-p_4-p_2+p_3)z/2}\right].$$

После интегрирования по X появится $\delta\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right)$. С учетом этого,

$$[\ldots] = e^{i(p_2-p_4)z} + e^{i(p_2-p_3)z}$$

Обозначим через $D(k)$ фурье-образ функции $D(z)$:

$$\int D\left(z\right) e^{ikz} d^4 z = D\left(k\right), \quad D\left(z\right) = \int D\left(k\right) e^{-ikz} \frac{d^4 k}{\left(2\pi\right)^4},$$

тогда амплитуда рассеяния процесса окажется выраженной через сумму двух пропагаторов в импульсном представлении (см. рис. 15–16)

$$iM_{fi}^{(2)} = \left(-ig\right)^2\left[iD\left(p_2 - p_4\right) + iD\left(p_2 - p_3\right)\right].$$

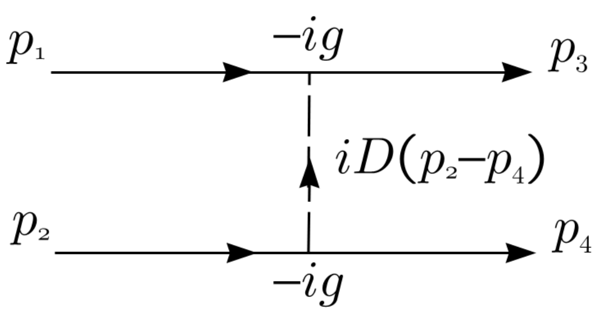


Рис. 15. Рассеяние $\pi^-\pi^- \to \pi^-\pi^-$: t-обмен π^0

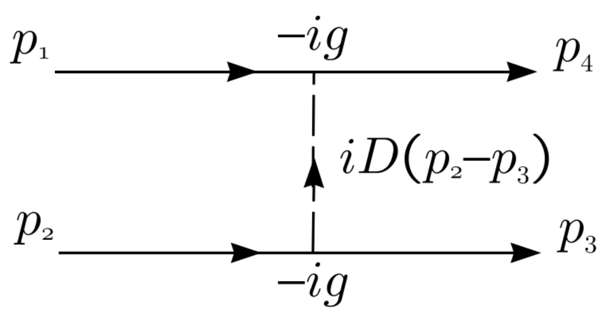


Рис. 16. Рассеяние $\pi^-\pi^- \to \pi^-\pi^-$: u-обмен π^0

В первой диаграмме аргумент пропагатора равен 4-импульсу промежуточной нейтральной частицы $k = p_2 - p_4 = p_3 - p_1$, так что $k^2 = t < 0$. Эта диаграмма соответствует обмену π^0 в t-канале; аналогично, вторая диаграмма соответствует обмену π^0 в u-канале. В отличие от начальных и конечных частиц, для 4-импульсов которых справедливо равенство $p_i^2 = m_{\pi^-}^2$, $i = 1 \div 4$, для промежуточных частиц $k^2 \neq m_{\pi^0}^2$, а потому $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_{\pi^0}^2} \neq k_0$. Такие частицы называются*виртуальными*, а величина $k^2 - m_{\pi^0}^2$ называется *виртуальностью* данной промежуточной частицы. Виртуальность $k^2 - m_{\pi^0}^2$ характеризует отклонение частицы от массовой поверхности $k^2 = m_{\pi^0}^2$. Виртуальная частица живет время

$$\tau \sim \frac{1}{\sqrt{|k^2 - m_{\pi^0}^2|}}$$

и пролетает расстояние

$$r \sim \frac{1}{\sqrt{|k^2 - m_{\pi^0}^2|}}.$$

Чем больше виртуальность, тем меньшие расстояния сможет “прощупать” такая частица — см. глубоконеупругое рассеяние электрона на протоне (ср. опыты Резерфорда по исследованию структуры атома).

Аналогично можно рассмотреть процесс

$$\pi^-\pi^+ \to \pi^-\pi^+ ,$$

для которого амплитуда рассеяния равна (см. рис. 17–18)

$$iM_{fi}^{(2)} = (-ig)^2 \left[iD\left(p'_- - p_-\right) + iD\left(p_- + p_+\right)\right] .$$

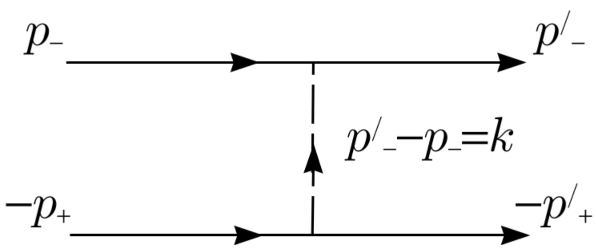


Рис. 17. Рассеяние $\pi^-\pi^+ \to \pi^-\pi^+$: $k^2 < 0$, t-обмен π^0

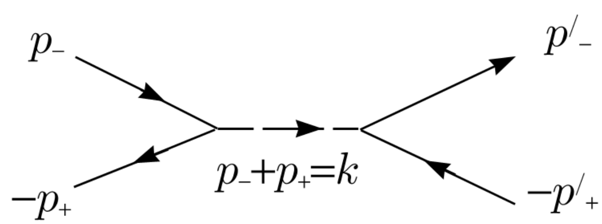


Рис. 18. Рассеяние $\pi^-\pi^+ \to \pi^-\pi^+$: $k^2 > 0$, s-обмен π^0

13.3. Пропагатор скалярной частицы

Используя свойства оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\left[\hat{\Phi}(x)\,\hat{\Phi}(x')\right] = \begin{cases} \hat{\Phi}(x)\,\hat{\Phi}(x') & \text{при } \ t > t' \\ \hat{\Phi}(x')\,\hat{\Phi}(x) & \text{при } \ t' > t \end{cases} ,$$

представим пропагатор в виде

$$\begin{aligned} iD(x - x') \;&=\; \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_k \mathcal{V} 2\varepsilon_{k'} \mathcal{V}}} \left[\theta(t - t') \langle 0|\, \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}^+_{\mathbf{k}'}\, |0\rangle\, e^{-ikx + ik'x'} + \right. \\ &+ \left. \theta(t' - t) \langle 0|\, \hat{c}_{\mathbf{k}'} \hat{c}^+_{\mathbf{k}}\, |0\rangle\, e^{-ik'x' + ikx}\right] . \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое в квадратных скобках соответствует процессу рождения промежуточного π^0 в точке x' и поглощение его в точке x, а второе слагаемое — рождению π^0 в точке x и поглощению его в точке x'.

Т. к.

$$\langle 0|\, \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}^+_{\mathbf{k}'}\, |0\rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} ,$$

то

$$iD(x) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \left[\theta(t) e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \theta(-t) e^{+i\varepsilon_{\mathbf{k}} t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}\right] .$$

Теперь во втором слагаемом сделаем замену $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, перейдём от суммы по $\mathbf{k}$ к интегралу

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

и окончательно получим

$$iD(x) = \int \frac{d^3k}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}(2\pi)^3} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}|t|+i\mathbf{kr}},$$

где $|t|$ из-за $\theta(\pm t)$.

Покажем, что

$$\frac{e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}|t|}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} = J\,, \quad J = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{-ik_0 t}}{k_0^2 - \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + i0}.$$

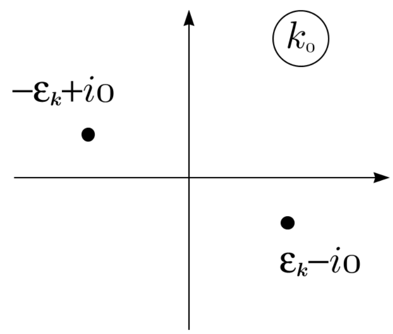


Рис. 19. Комплексная плоскость k_0

Интеграл J легко берётся по вычетам, полюса подынтегрального выражения расположены в точках (см. рис. 19)

$$k_0 = \pm\sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 - i0} = \pm\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp i0\,.$$

Если $t > 0$, контур замыкаем в нижней полуплоскости:

$$J = i\,(-2\pi i)\,\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}t}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} = \frac{e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}t}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\,,$$

ч. т. д. Аналогично, при $t < 0$ — контур замкнём в верхней полуплоскости:

$$J = i\,(+2\pi i)\,\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\varepsilon_{\mathbf{k}}t}}{(-2\varepsilon_{\mathbf{k}})} = \frac{e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}|t|}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}\,,$$

ч. т. д.

Итого:

$$D(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i0}, \quad kx = k_0 t - \mathbf{kr}, \quad k_0 \neq \varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},\ m \equiv m_{\pi^0},$$

и потому в импульсном представлении

$$D(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i0}.$$

Так как

$$\left(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2\right) D(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(k^2 - m^2\right)\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i0} = \delta(x),$$

то $D(x)$ является функцией Грина уравнения КФГ. Явный вид $D(x)$ дан в книге Боголюбова и Ширкова "Ведение в теорию квантованных полей" (Приложение 2) :

$$D(x) = -\frac{\delta(\lambda)}{4\pi} + \frac{m}{8\pi\sqrt{\lambda}}\theta(\lambda)\left[J_1\left(\sqrt{m^2\lambda}\right) - iN_1\left(\sqrt{m^2\lambda}\right)\right] - \frac{im}{4\pi^2\sqrt{-\lambda}}\theta(-\lambda)K_1\left(\sqrt{-m^2\lambda}\right),$$

где $\lambda = x^2 = t^2 - \mathbf{r}^2$, а $J_1(z)$, $N_1(z)$ и $K_1(z)$ — функция Бесселя, функция Неймана и функция Ханкеля от мнимого аргумента. В окрестности светового конуса (при $|\lambda| \ll 1/m^2$):

$$D(x) = -\frac{\delta(\lambda)}{4\pi} + \frac{i}{4\pi^2\lambda} - \frac{im^2}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{m^2\,|\lambda|}}{2} + \frac{m^2}{16\pi}\theta(\lambda).$$

Видно, что на световом конусе эта функция обладает целым букетом сингулярностей. Это означает, в частности, что в высших порядках теории возмущений, где будут встречаться произведение таких функций, придется специально доопределять эти плохо определённые выражения (проблема бесконечностей). При $|\lambda| \gg 1/m^2$ пропагатор быстро убывает, особенно в пространственно-подобной области:

$$D(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda|^{3/4}} e^{-\sqrt{m^2|\lambda|}}, & \text{при } \lambda < 0 \\ \dfrac{1}{\lambda^{3/4}}, & \text{при } \lambda > 0 \end{cases}$$

13.4. Процесс $\pi^0\pi^- \to \pi^0\pi^-$ и $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$

Рассмотрим процесс (рис. 20)

$$\pi^0\pi^- \to \pi^0\pi^-\,,$$

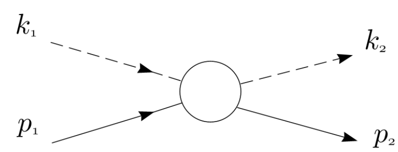


Рис. 20. Процесс $\pi^0\pi^- \to \pi^0\pi^-$

для которого начальное и конечное состояние таковы:

$$|i\rangle = \hat{a}_1^+\hat{c}_1^+\,|0\rangle\,, \quad |f\rangle = \hat{a}_2^+\hat{c}_2^+\,|0\rangle\,. \tag{13.1}$$

Матричный элемент этого процесса равен:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} \;=\; & \frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4x d^4x'\,\langle 0|\,\hat{c}_2\hat{T}\left[\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(x')\right]\hat{c}_1^+\,|0\rangle\,\cdot \\ & \langle 0|\,\hat{a}_2\hat{T}\left[\hat{\varphi}^+(x)\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^+(x')\hat{\varphi}(x')\right]\hat{a}_1^+\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{13.2}$$

В импульсном представлении в $iM_{fi}^{(2)}$ дают вклад диаграммы, приведенные на рис. 21–22:

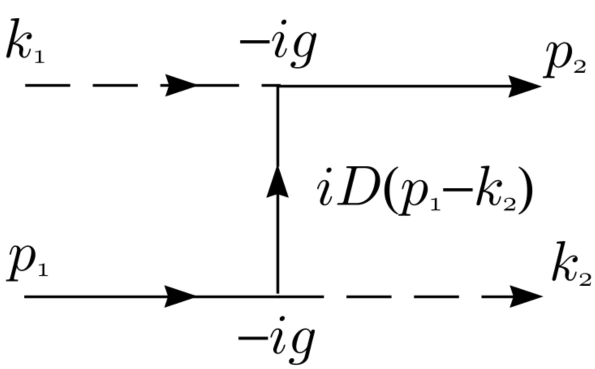


Рис. 21. Диаграмма с π^- обменом в u-канале

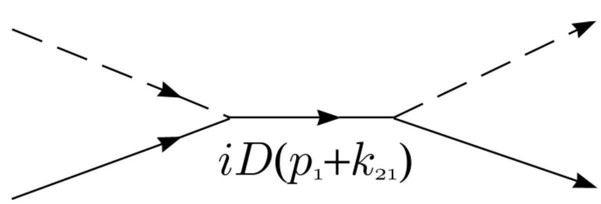


Рис. 22. Диаграмма с π^- обменом в s-канале

Здесь $D(p)$ — фурье-образ пропагатора скалярной заряженной частицы $D(x)$:

$$\begin{aligned} iD(x-x') &= \langle 0|\,\hat{T}\left[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^{+}(x')\right]|0\rangle = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}2\varepsilon_{\mathbf{p}'}\mathcal{V}}}\cdot \\ &\left[\theta\left(t-t'\right)\langle 0|\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}'}\,|0\rangle\, e^{-ipx+ip'x'} + \theta\left(t'-t\right)\langle 0|\,\hat{b}_{\mathbf{p}'}\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\,|0\rangle\, e^{-ip'x'+ipx}\right]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует частице, которая родилась в точке x' и исчезла в точке x, второе слагаемое соответствует античастице, движущейся в обратном направлении. Расчёт $D(x)$ для заряженной скалярной частицы не отличается от расчёта для нейтральной скалярной частицы:

$$D(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ipx}}{p^2-\mu^2+i0}\,, \quad \mu \equiv m_{\pi^-}\,.$$

Итог:

$$M^{(2)}_{fi} = -g^2\left[\frac{1}{\left(p_1-k_2\right)^2-\mu^2+i0} + \frac{1}{\left(p_1+k_1\right)^2-\mu^2+i0}\right]$$

Аналогично, процесс $\pi^-\pi^+ \to \pi^0\pi^0$ определяется диаграммами, приведенными на рис. 23–24:

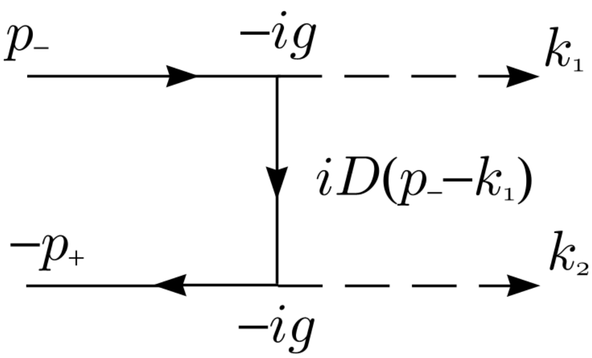


Рис. 23. Диаграмма с π^- обменом в t-канале

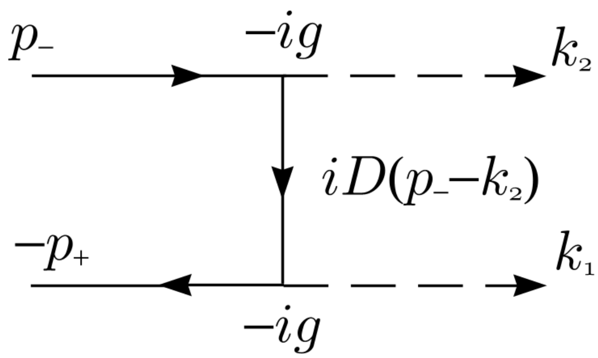


Рис. 24. Диаграмма с π^- обменом в u-канале

$$M^{(2)}_{fi} = -g^2\left[\frac{1}{\left(p_- - k_1\right)^2-\mu^2} + \frac{1}{\left(p_- + k_2\right)^2-\mu^2}\right]$$

§ 14. Второй порядок теории возмущений в КЭД. Фотонный пропагатор

В операторе $\hat{S}^{(2)}$ упорядочение по времени можно производить отдельно для фотонных и электрон-позитронных операторов, т. е.

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!}\int d^4x d^4x' \hat{T}\left[\hat{\bar{\Psi}}(x)\gamma_\mu\Psi(x)\bar{\Psi}\left(x'\right)\gamma_\nu\Psi\left(x'\right)\right]\hat{T}\left[\hat{A}^{\mu}(x)\hat{A}^{\nu}\left(x'\right)\right].$$

14.1 Рассеяние электронов

При расчёте сечения процесса $e^- e^- \to e^- e^-$ действуем по привычной схеме:

$$|i\rangle = \hat{a}_2^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle, \quad |f\rangle = \hat{a}_4^+ \hat{a}_3^+ |0\rangle, \quad \hat{a}_i^+ \equiv \hat{a}^+_{\mathbf{p}_i \sigma_i},$$

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \int d^4 x d^4 x' i D^{\mu\nu}(x - x') f_{\mu\nu}(x, x'),$$

где

$$f_{\mu\nu}(x, x') = \frac{1}{2!} \langle 0| \hat{a}_3 \hat{a}_4 \hat{T} \left[\hat{\bar{\Psi}}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \bar{\Psi}(x') \gamma_\nu \Psi(x') \right] \hat{a}_2^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle \ ,$$

а

$$i D^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0| \hat{T} \left[\hat{A}^\mu(x) \hat{A}^\mu(x') \right] |0\rangle$$

— пропагатор фотона

При расчёте $f_{\mu\nu}$ будем действовать, как и в скалярном случае, учитывая дополнительно антикоммутативность фермионных операторов и спинорную структуру полей:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} u_{\mathbf{p}\sigma} \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}} + \ldots \right), \quad \hat{\bar{\Psi}}(x) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \bar{u}_{\mathbf{p}\sigma} \frac{e^{+ipx}}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}} \mathcal{V}}} + \ldots \right).$$

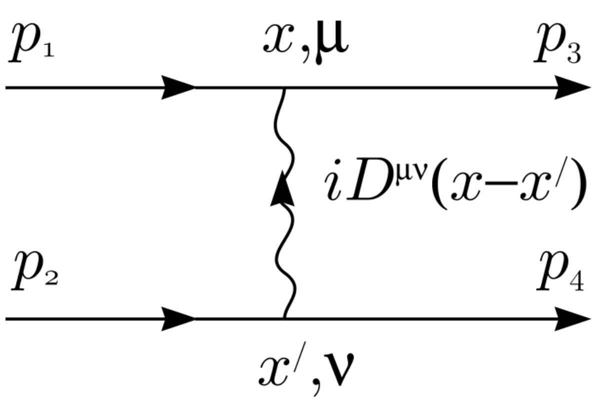


Рис. 25. Вариант свёрток в $f_{\mu\nu}$

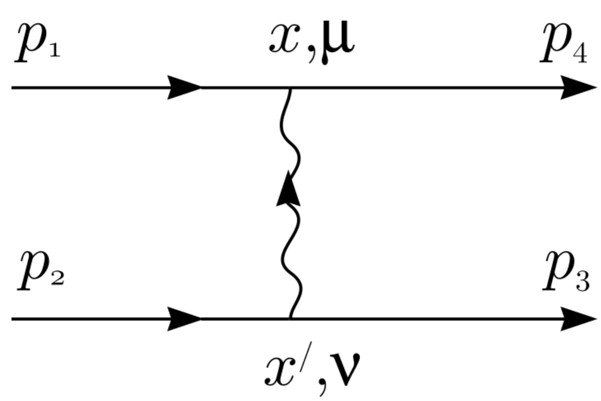


Рис. 26. Другой вариант свёрток в $f_{\mu\nu}$

$$f_{\mu\nu}(x, x') = \frac{1}{2!} [\text{рис. 25 - рис. 26} + (x \leftrightarrow x')] =$$

$$= (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1)(\bar{u}_4 \gamma_\nu u_2) e^{-i(p_1 - p_3)x - i(p_2 - p_4)x'} - (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1)(\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) e^{-i(p_1 - p_4)x - i(p_2 - p_3)x'} .$$

Дальнейшее интегрирование по x и x' стандартно, итог (см. рис. 27–28):

$$i M_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \left[(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) i D^{\mu\nu}(p_3 - p_1)(\bar{u}_4 \gamma_\nu u_2) - (\bar{u}_4 \gamma_\nu u_1) i D^{\mu\nu}(p_4 - p_1)(\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) \right] .$$

Дополнительно: найти $M_{fi}^{(2)}$ для процесса $e^- e^+ \to e^- e^+$ рассеяния, который описывается двумя диаграммами — диаграммой рассеяния (фотон в t-канале) и диаграммой аннигиляции (фотон в s-канале).

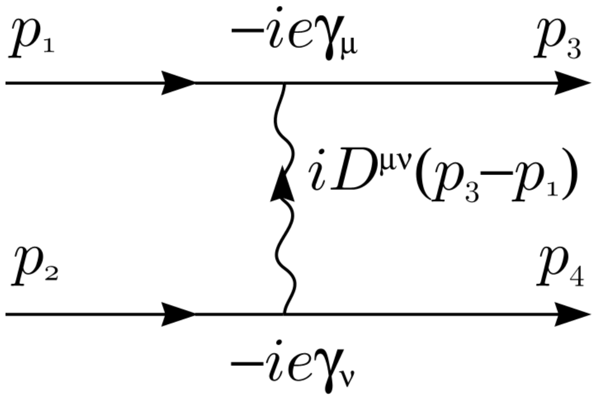


Рис. 27. Диаграмма с γ обменом в t-канале

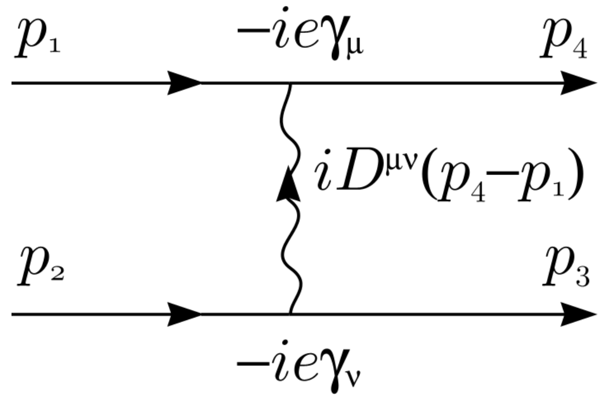


Рис. 28. Диаграмма с γ обменом в u-канале

14.2. Фотонный пропагатор

Фотонный пропагатор уже определён выше:

$$iD^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0| \hat{T}\left[\hat{A}^{\mu}(x)\hat{A}^{\nu}(x')\right]|0\rangle \ .$$

Общий вид симметричного тензора второго ранга, зависящего от 4-вектора x, таков:

$$D^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu} D\left(x^2\right) - \partial^{\mu}\partial^{\nu} D^{(l)}\left(x^2\right),$$

или в k-пространстве:

$$D^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} D\left(k^2\right) + k^{\mu}k^{\nu} D^{(l)}\left(k^2\right),$$

причем, в силу градиентной инвариантности, от $D^{(l)}\left(k^2\right)$ физические результаты не должны зависеть. Поэтому достаточно найти $D\left(k^2\right)$ в любой калибровке. Мы будем для расчета использовать кулоновскую калибровку, в которой $\hat{A}_0 = 0$ и

$$\hat{\mathbf{A}}(x) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{V}}}\left(\hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\, e^{-ikx} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda}\, e^{ikx}\right), \quad kx = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{kr}.$$

Отличие от скалярного случая: общий множитель $\sqrt{4\pi}$, $m = 0$, $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ и наличие вектора поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$. Т. к.

$$\langle 0|\, \hat{c}_{\mathbf{k}\lambda}\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}'\lambda'}\, |0\rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},$$

то, повторяя вычисления § 13.3, получим

$$D^{mn}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2 + i0}4\pi \sum_{\lambda}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\right)^m\left(\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda}\right)^n,$$

где $m, n = 1, 2, 3$. Условие полноты векторов $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ гласит

$$\sum_{\lambda}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\right)^m\left(\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda}\right)^n = \delta^{mn} - \frac{k^n k^m}{\mathbf{k^2}}, \quad \delta^{mn} = -g^{mn}.$$

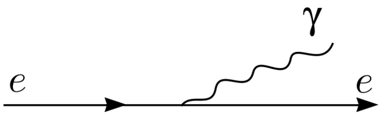


Рис. 29. Вершина $e \to e\gamma$

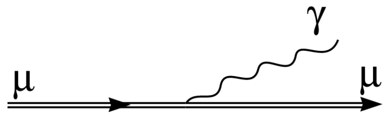


Рис. 30. Вершина $\mu \to \mu\gamma$

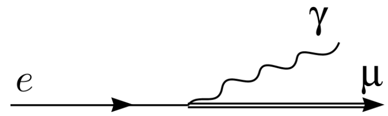


Рис. 31. Вершина $e \to \mu\gamma$

Таком образом, в нашей калибровке

$$D^{mn}(k) = g^{mn} D\left(k^2\right) + k^m k^n D^{(l)}\left(k^2\right) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}\left(\delta^{mn} - \frac{k^n k^m}{\mathbf{k^2}}\right),$$

отсюда

$$D\left(k^2\right) = \frac{-4\pi}{k^2 + i0},$$

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{-4\pi}{k^2 + i0}\, g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu D^{(l)}\left(k^2\right).$$

Часто выбирают $D^{(l)}(k^2) = 0$ (калибровка Фейнмана), тогда

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{-4\pi}{k^2 + i0}\, g^{\mu\nu}.$$

14.3. Диаграммы Фейнмана и закон Кулона

Рассмотрим рассеяние нерелятивистского электрона на мюоне

$$e^-\mu^\pm \to e^-\mu^\pm.$$

Мюон может рассматриваться, как точечный источник кулоновского поля

$$U\left(\mathbf{r}\right) = \pm\frac{e^2}{r},$$

фурье-образ которого

$$U_{\mathbf{q}} = \int U\left(\mathbf{r}\right) e^{-i\mathbf{qr}} d^3 r = \pm\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q^2}}.$$

В квантовой механике дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2, \quad f = -\frac{m_e}{2\pi} U_{\mathbf{q}} = -\frac{m_e}{2\pi}\left(\pm\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q^2}}\right),$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ и $\varepsilon' = \varepsilon$.

В КЭД взаимодействие электромагнитного поля с $e^\pm$ и $\mu^\pm$ описывается оператором

$$\hat{V}(x) = e\hat{A}^\alpha(x)\left[\hat{\bar{\Psi}}_e(x)\gamma_\alpha\hat{\Psi}_e(x) + \hat{\bar{\Psi}}_\mu(x)\gamma_\alpha\hat{\Psi}_\mu(x)\right],$$

Таким образом в КЭД имеются элементарные вершины только двух типов рис. 29 и рис. 30, но нет вершин рис. 31.

Процесс $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ описывается одной диаграммой (рис. 32):

$$iM_{fi} = (-ie)^2\,(\bar u_3\gamma_\alpha u_1)\,iD^{\alpha\beta}(q)\,(\bar u_4\gamma_\beta u_2)\,.$$

В системе покоя начального μ^- (эта система для нерелятивистского e^- совпадает с СЦИ, т. к. $m_\mu \approx 200\,m_e$)

$$q = p_3 - p_1 = (0, \mathbf{q})\,,\ \ q^2 = -\mathbf{q}^2\,,$$

все биспиноры u_j имеют только верхние компоненты, потому $(\bar u_3\gamma_\alpha u_1) \neq 0$ только при $\alpha = 0$, $(\bar u_4\gamma_\beta u_2) \neq 0$ только при $\beta = 0$ и

$$D^{00} = \frac{-4\pi}{q^2} = +\frac{4\pi}{\mathbf{q^2}}\,.$$

В итоге:

$$M_{fi} = -\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q^2}}\left(u_3^+u_1\right)\left(u_4^+u_2\right) = -\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q^2}}2m_e\delta_{\sigma_1\sigma_3}\,2m_\mu\delta_{\sigma_2\sigma_4}.$$

Учтя, что

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \left|\frac{M_{fi}}{8\pi\,(m_\mu + m_e)}\right|^2 \quad \text{или} \quad f = \frac{M_{fi}}{8\pi m_\mu},$$

получим согласие с результатом из квантовой механики.

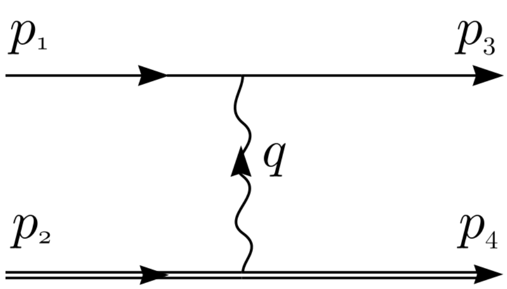


Рис. 32. Процесс $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

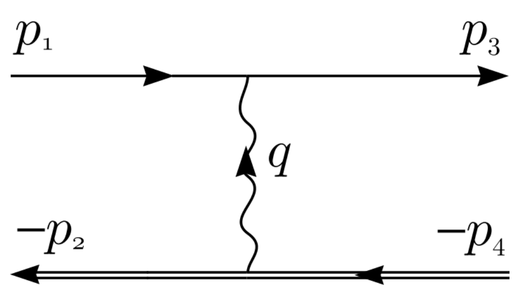


Рис. 33. Процесс $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$

Для процесса $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$ амплитуда рассеяния (см. рис. 33)

$$iM_{fi} = (-1)\,(-ie)^2\,(\bar u_3\gamma_\alpha u_1)\,iD^{\alpha\beta}(q)\,(\bar v_2\gamma_\beta v_4)\,,$$

где дополнительный множитель (-1) связан с антикоммутативностью фермионных операторов и другим набором свёрток для μ^+, чем для μ^-. В итоге

$$M_{fi} = +\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q^2}}2m_e\delta_{\sigma_1\sigma_3}\,2m_\mu\delta_{\sigma_2\sigma_4}.$$

Таким образом, закон Кулона, соответствующий силам отталкивания для $e^-\mu^-$ и силам притяжения для $e^-\mu^+$, связан с обменом векторной частицей — фотоном — между заряженными фермионами.

Покажите, что для взаимодействия

$$\hat V(x) = g\hat\Phi(x)\left[\hat{\bar\Psi}_e(x)\hat\Psi_e(x) + \hat{\bar\Psi}_\mu(x)\hat\Psi_\mu(x)\right]$$

амплитуда $e^-\mu^\pm \to e^-\mu^\pm$ рассеяния определяется обменом нейтральной скалярной частицей и равна

$$M_{fi} = \frac{g^2}{\mathbf{q}^2+m^2} 2m_e\delta_{\sigma_1\sigma_3}\, 2m_\mu \delta_{\sigma_2\sigma_4}\,,$$

что соответствует потенциальной энергии вида

$$U_q = -\frac{g^2}{\mathbf{q}^2+m^2}, \quad U(r) = -\frac{g^2/4\pi}{r} e^{-rm},$$

т. е. юкавскому потенциалу притяжения как для $e^-\mu^-$, так и для $e^-\mu^+$ взаимодействия.

14.4. Процесс аннигиляции $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Для этого процесса закон сохранения 4-импульса имеет вид

$$p_1+p_2 = p_3+p_4\,,$$

а переменные Мандельстама таковы

$$s=(p_1+p_2)^2\,, \quad t=(p_1-p_3)^2\,, \quad u=(p_1-p_4)^2\,,$$

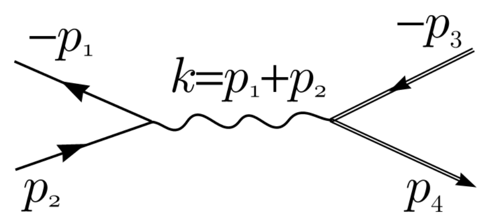


Рис. 34. Процесс $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

при этом

$$s+t+u = 2m^2+2\mu^2\,, \quad p_1^2=p_2^2=m^2\,, \quad p_3^2=p_4^2=\mu^2\,,$$

а также

$$p_1p_3 = p_2p_4, \quad p_1p_4 = p_2p_3\,.$$

Амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = (-ie)^2\,(\bar v_1\gamma_\alpha u_2)\,\frac{-4\pi g^{\alpha\beta}}{s}\,(\bar u_4\gamma_\beta v_3) = \frac{4\pi\alpha}{s}F\,,$$

где

$$F = (\bar v_1\gamma_\alpha u_2)\,(\bar u_4\gamma^\alpha v_3)\,.$$

Искомое сечение для неполяризованных частиц содержит

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sum_{\sigma_{1,2,3,4}}|F|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{(\not p_1-m)\,\gamma^\alpha\,(\not p_2+m)\,\gamma^\beta\right\}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left\{(\not p_4+\mu)\,\gamma_\alpha\,(\not p_3-\mu)\,\gamma_\beta\right\} = \\ &= \left\{2p_1^\alpha p_2^\beta + 2p_2^\alpha p_1^\beta - sg^{\alpha\beta}\right\}\left\{2p_{3\alpha}p_{4\beta}+2p_{4\alpha}p_{3\beta}-sg_{\alpha\beta}\right\} = \\ &= 8\,(p_1p_3)^2 + 8\,(p_1p_4)^2 + 4s\left(\mu^2+m^2\right)\,,\end{aligned}$$

где $\not p \equiv p^\alpha\gamma_\alpha$.

В с.ц.и.

$$p_1p_3 = \varepsilon_1^2\,(1-v_ev_\mu\cos\theta)\,, \quad p_1p_4 = \varepsilon_1^2\,(1+v_ev_\mu\cos\theta)\,,$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_3$ (угол вылета μ^+ по отношению к направлению движения e^+), а скорости электрона и мюона равны

$$v_e = \sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\,, \quad v_\mu = \sqrt{1-\frac{4\mu^2}{s}}\,.$$

В итоге получаем

$$|M_{fi}|^2 = (4\pi\alpha)^2 \left(1 + \frac{4\mu^2 + 4m^2}{s} + v_e^2 v_\mu^2 \cos^2\theta\right) ,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi^2 s}\frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(1 + \frac{4\mu^2 + 4m^2}{s} + v_e^2 v_\mu^2 \cos^2\theta\right) . \frac{v_\mu}{v_e}$$

Отсюда, считая $m \ll \mu$, находим полное сечение (см. рис. 5.1 и 5.2 в книге Пескина и Шрёдера “Введение в квантовую теорию поля”)

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{2\mu^2}{s}\right) v_\mu, \quad \sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \approx \frac{87 \cdot 10^{-33}\text{см}^2}{s[\text{ГэВ}^2]}.$$

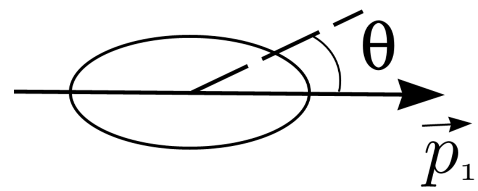


Рис. 35. Угловое распределение в реакции $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

При $s \gg 4\mu^2$ имеем (см. рис. 35)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(1 + \cos^2\theta\right) , \ \ \sigma = \sigma_0 .$$

14.5. Процессы $e^+e^- \to \bar{q}q$ и $e^+e^- \to hadrons$ при высоких энергиях

Рассмотрим аннигиляцию электрона и позитрона в пару кварков с зарядом $\pm Q_a\,|e|$.

Сечение этого процесса $e^+e^- \to \bar{q}_a q_a$ при высоких энергиях ($s \gg 4m_a^2$) равно

$$\sigma_{e^+e^- \to \bar{q}_a q_a} = 3Q_a^2\sigma_0,$$

где множитель 3 учитывает наличие трёх цветов у кварков.

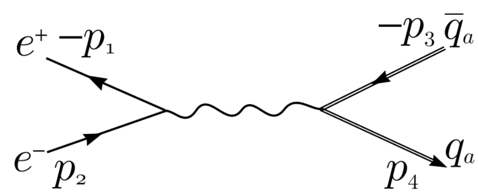


Рис. 36. Процесс $e^+e^- \to \bar{q}q$

Процесс $e^+e^- \to hadrons$ при $s \gg 4m_a^2$ в низшем порядке по α может быть описан как рождение $\bar{q}_a q_a$ пары на малых расстояниях $\sim 1/\sqrt{s}$ и дальнейшая адронизация (с вероятностью 100%) кварков в адроны. Потому

$$\frac{\sigma_{e^+e^- \to h}}{\sigma_0} \equiv R = 3\sum_a Q_a^2,$$

где в $\sum_a$ учитываются те кварки, для которых $2m_a \ll \sqrt{s}$.

$$3\sum_{uds} Q_a^2 = 3\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2, \quad 3\sum_{udsc} Q_a^2 = 2 + 3 \cdot \frac{4}{9} = 2 + \frac{4}{3}, \quad 3\sum_{udscb} Q_a^2 = 2 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

(см. рис. 40.6 и 40.7 из Review of Particle Properties 2008).

Для двухструйных процессов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto 1 + \cos^2\theta,$$

где θ — угол вылета струи относительно оси столкновения e^+e^- пучков.

14.6. Процесс $e\mu \to e\mu$ и перекрёстная симметрия

Рассмотрим процесс упругого рассеяния электрона на мюоне, не считая на этот раз электрон нерелятивистским (см. обозначения на рис. 37, напомним, что $p^2 = (p')^2 = m^2$ и $P^2 = (P')^2 = \mu^2$).

Амплитуда рассеяния для этого процесса равна

$$M_{fi} = \frac{4\pi\alpha}{q^2} \bar{F} \,,$$

где

$$\bar{F} = \left(\bar{u}_{\mathbf{p}'\sigma_2} \gamma^\alpha u_{\mathbf{p}\sigma_1}\right) \left(\bar{u}_{\mathbf{P}'\sigma_4} \gamma_\alpha u_{\mathbf{P}\sigma_3}\right) \,.$$

Сравнивая

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2} \sum_{\sigma_{1,2,3,4}} \left|\bar{F}\right|^2 = \frac{1}{2} \mathrm{Sp} \left\{ \left(\not{p}' + m\right) \gamma^\alpha \left(\not{p} + m\right) \gamma^\beta \right\} \frac{1}{2} \mathrm{Sp} \left\{ \left(\not{P}' + \mu\right) \gamma_\alpha \left(\not{P} + \mu\right) \gamma_\beta \right\}$$

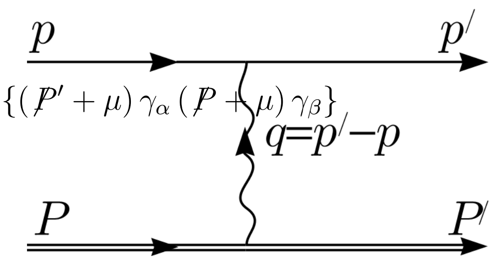


Рис. 37. Процесс $e\mu \to e\mu$

с соответствующим выражением для реакции $e^+e^- \to \mu^-\mu^+$ в § 14.4, найдём, что ответ можно найти в § 14.4, если сделать подстановки

$$p_1 = -p', \;\; p_2 = p, \;\; p_3 = -P, \;\; p_4 = P', \;\; u = (p + P)^2 \,, \;\; s = q^2 \,.$$

Таким образом, для искомого процесса

$$|M_{fi}|^2 = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 \left[8\,(pP)^2 + 8\,(p'P)^2 + 4q^2 \left(m^2 + \mu^2\right) \right]$$

и в с.ц.и. сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi^2 \left(\varepsilon_e + \varepsilon_\mu\right)^2}.$$

Если энергия электрона $\varepsilon \ll \mu$, то этот процесс можно рассматривать, как рассеяние электрона (релятивистского или нерелятивистского) на внешнем кулоновском поле бесконечно тяжелого мюона, при этом $\varepsilon = \varepsilon'$, $q^2 = -\mathbf{q}^2 = -\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}'\right)^2 = -4\mathbf{p}^2 \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$ и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 \mathbf{p}^2 \sin^4 \dfrac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

где первый множитель отвечает резерфордовскому сечению, а второй $\left(1 - v^2 \sin^2 \dfrac{\theta}{2}\right)$ учитывает наличие спина у электрона.

§ 15. Второй порядок теории возмущенийв КЭД. Электронный пропагатор

15.1. γe-рассеяние

Рассмотрим рассеяние фотона на электроне

$$\gamma(k_1) + e^-(p_1) \to \gamma(k_2) + e^-(p_2) \,,$$

для которого переменные Мандельстама равны

$$s = (k_1 + p_1)^2 , \quad t = (k_1 - k_2)^2 , \quad u = (p_1 - k_2) \ ,$$

а начальное и конечное состояния таковы

$$|i\rangle = \hat{c}_1^+ \hat{a}_1^+ |0\rangle , \quad |f\rangle = \hat{c}_2^+ \hat{a}_2^+ |0\rangle \ , \ \ \hat{c}_i \equiv \hat{c}_{\mathbf{k}_i \lambda_i} .$$

Сравним матричный элемент этого процесса

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x d^4x' F^{\mu\nu}(x, x') f_{\mu\nu}(x, x') \ ,$$

$$F^{\mu\nu}(x, x') = \langle 0| \hat{c}_2 \hat{T} \left\{ \hat{A}^\mu (x) \hat{A}^\nu (x') \right\} \hat{c}_1^+ |0\rangle \ ,$$

$$f_{\mu\nu}(x, x') = \langle 0| \hat{a}_2 \hat{T} \left\{ \left(\hat{\bar{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) \right) \left(\hat{\bar{\psi}}(x') \gamma_\nu \hat{\psi}(x') \right) \right\} \hat{a}_1^+ |0\rangle$$

с тем, что было для процесса $\pi^0\pi^-$ рассеяния в § 13.4:

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x d^4x' F(x, x') f(x, x') ,$$

$$F(x, x') = \langle 0| \hat{c}_2 \hat{T} \left\{ \hat{\Phi}(x) \hat{\Phi}(x') \right\} \hat{c}_1^+ |0\rangle \ ,$$

$$f(x, x') = \langle 0| \hat{a}_2 \hat{T} \left\{ \hat{\varphi}^+(x) \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^+(x') \hat{\varphi}(x') \right\} \hat{a}_1^+ |0\rangle \ ,$$

$$M_{fi} = -g^2 \left[D(p_1 - k_2) + D(p_1 + k_1) \right] .$$

В КЭД усложнения связаны со спинами частиц, в частности

$$F^{\mu\nu}(x, x') = \frac{4\pi}{\sqrt{2\omega_1 \mathcal{V} 2\omega_2 \mathcal{V}}} \left[e_1^\mu e_2^{\nu *} e^{-ik_1 x + ik_2 x'} + e_1^\nu e_2^{\mu *} e^{-ik_1 x' + ik_2 x} \right] , \ \ e_i^\mu \equiv e_{\mathbf{k}_i \lambda_i}^\mu$$

что соответствует уже известным правилам для начального и конечного фотонов.

В функции $f(x, x')$ помимо спариваний операторов $\hat{a}_2$ и $\hat{a}_1^+$ с функциями $\hat{\varphi}^+(x')$ и $\hat{\varphi}(x)$ оставался пропагатор

$$\langle 0| \hat{T} \left\{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}^+(x') \right\} |0\rangle = iD(x - x') .$$

Аналогично, в $f_{\mu\nu}(x, x')$ помимо спариваний $\hat{a}_2$ и $\hat{a}_1^+$ с $\hat{\bar{\psi}}(x')$ и $\hat{\psi}(x)$, соответствующих начальному и конечному электронам, остаётся электронный пропагатор

$$\langle 0| \hat{T} \left\{ \hat{\psi}_j(x) \hat{\bar{\psi}}_k(x') \right\} |0\rangle = iG_{jk}(x - x') ,$$

являющийся матрицей по спинорным индексам j, k.

Рис. 38. Диаграмма с e обменом в u-канале

Рис. 39. Диаграмма с e обменом в s-канале

В итоге для γe рассеяния получаем (рис. 38–39)

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \left[\bar{u}_2 \gamma_\mu e_1^\mu G(p_1 - k_2) \gamma_\nu e_2^{\nu *} u_1 + \bar{u}_2 \gamma_\nu e_2^{\nu *} G(p_1 + k_1) \gamma_\mu e_1^\mu u_1 \right] . \tag{15.1}$$

15.2. Электронный пропагатор

Для скалярной частицы пропагатор $D(x)$ является функцией Грина уравнения Клейна-Фока-Гордона:

$$\left(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - \mu^2\right) D(x) = \delta(x)$$

или в импульсном представлении

$$\left(k^2 - \mu^2\right) D(k) = 1\,,$$

что приводит к пропагатору скалярной частицы

$$D(k) = \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i0}.$$

Электронный пропагатор — матрица $G_{jk}(x)$ — является функцией Грина уравнения Дирака:

$$\left(\hat{p}_\mu \gamma^\mu - mI\right)_{ij} G_{jk}(x) = \delta(x)\delta_{ik}\,,$$

где I — единичная матрица. Отсюда

$$\left(\hat{p}_\mu \gamma^\mu - mI\right) \int G(p) e^{-ipx} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \int \left(p_\mu \gamma^\mu - mI\right) G(p) e^{-ipx} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = \delta(x) I = \int I \cdot e^{-ipx} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4},$$

т. е. в импульсном представлении

$$\left(p_\mu \gamma^\mu - mI\right) G(p) = I\,.$$

Домножим левую и правую часть этого уравнения слева на $(p_\nu \gamma^\nu + mI)$ и учтём, что

$$p_\nu \gamma^\nu p_\mu \gamma^\mu = p^2 I,$$

тогда

$$\left(p_\nu \gamma^\nu + mI\right)\left(p_\mu \gamma^\mu - mI\right) G(p) = \left(p^2 - m^2\right) G(p) = p_\nu \gamma^\nu + mI\,.$$

В итоге получаем

$$G(p) = \frac{p_\mu \gamma^\mu + mI}{p^2 - m^2 + i0}$$

или в сокращённой форме

$$G(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0}\,, \tag{15.2}$$

где

$$\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu\,.$$

15.3. Эффект Комптона

Собирая вместе формулы (1)–(2), получим

$$M_{fi}^{(2)} = -4\pi\alpha \left[\frac{\bar{u}_2 \ \not{e}_1 \left(\not{p}_1 - \not{k}_2 + m\right) \ \not{e}_2^* \, u_1}{u - m^2} + \frac{\bar{u}_2 \ \not{e}_2^* \left(\not{p}_1 + \not{k}_1 + m\right) \ \not{e}_1 \, u_1}{s - m^2} \right].$$

Переписав закон сохранения 4-импульса $k_1 + p_1 = k_2 + p_2$ в виде $k_1 + p_1 - k_2 = p_2$ и возводя в квадрат обе стороны этого соотношения, получим

$$(p_1 + k_1 - k_2)^2 = (p_2)^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 + 2p_1k_1 - 2p_1k_2 - 2k_1k_2 = m^2$$

и далее

$$k_2\,(p_1 + k_1) = p_1k_1\,. \tag{21.3}$$

Если известны энергии и импульсы начальных частиц, то из этого уравнения можно найти энергию конечного фотона в зависимости от его угла вылета. Покажем это для двух различных начальных условий.

Опыты А. Комптона (1923–1924). В этих опытах рентгеновские лучи с частотой ω_1 и длиной волны $\lambda_1 = 2\pi/\omega_1$ рассеивались на атомах. Регистрировались рассеянные рентгеновские лучи с уменьшенной частотой ω_2 и увеличенной длиной волны $\lambda_2 = 2\pi/\omega_2$, причём эти изменения были тем больше, чем больше был угол рассеяния θ. Естественное объяснение эти опытов таково: рентгеновские лучи есть набор частиц–фотонов, которые испытывают рассеяние на атомарных электронах, причём последние в данных условиях могут рассматриваться как почти свободные (энергия связи электронов в атоме много меньше энергии налетающих фотонов). Иными словами, Комптон наблюдал реакцию $\gamma e \to \gamma e$, в которой

$$k_1 = \omega_1\,(1,\,1,\,0,\,0)\,, \quad k_2 = \omega_2\,(1,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,0)\,, p_1 = (m_e,\,0,\,0,\,0)\,.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получаем соотношение

$$\omega_2\,(m_e + \omega_1 - \omega_1\cos\theta) = \omega_1\,m_e\,,$$

из которого легко найти изменение длины волны рассеянных под углом θ рентгеновских лучей:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{4\pi}{m_e}\sin^2\frac{\theta}{2}\,,$$

где

$$\frac{1}{m_e} = 3,86\cdot 10^{-11}\ \text{ см}$$

приведённая комптоновская длина волны электрона. Эта формула хорошо описывает экспериментальные данные. В опытах Комптона энергия фотона уменьшалась, длина волны увеличивалась, но $\Delta\lambda/\lambda$ составляло несколько процентов. Отметим, что уменьшение энергии рассеянного фотона — естественное следствие того, что часть энергии начального фотона передаётся прежде покоившемуся электрону.

Соударение ультрарелятивисиского электрона и лазерного фотона. В настоящее время работает целый ряд установок, в которых пучок электронов высокой энергии $\varepsilon_1 \gg m_e$ сталкивается с летящим навстречу сгустком лазерных фотонов, энергия которых мала: $\omega_1 \sim 1$ эВ. Эти установки служат для получения фотонов высокой энергии, так как конечный фотон рассеивается в основном назад, т. е. почти вдоль направление начального электрона, и отбирает у начального электрона значительную долю его энергии. При такой постановки эксперимента уравнение (3) принимает вид

$$\omega_2[\varepsilon_1(1 - v_1\cos\theta) + \omega_1(1 + \cos\theta)] = \varepsilon_1\omega_1(1 + v_1)\,,$$

где v_1 — скорость начального электрона. Для начального ультрарелятивистского электрона $\varepsilon_1/m_e = \gamma \gg 1$, а углы рассеянного фотона θ, отсчитанные в этом случае от направления начального электрона, малы, $\theta \ll 1$, при этом $v_1 = 1 - 1/(2\gamma^2)$, $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$ и энергия рассеянного фотона равна

$$\omega_2 = \frac{x}{x + 1 + (\gamma\theta)^2}\,\varepsilon_1\,, \quad x = \frac{4\omega_1\varepsilon_1}{m_e^2}\,.$$

Приведём два характерных примера.

В опытах ИЯФ им. Будкера (Новосибирск, 1997) электроны ускорителя ВЭПП-4М с энергией $\varepsilon_1 = 5$ ГэВ сталкивались с лазерными фотонами с энергией $\omega_1 = 1,2$ эВ (инфракрасный лазер на неодимовом стекле). В этом случае $x = 0,092$ и максимальная энергия конечного фотона $\omega_1 = 0,42$ ГэВ, т. е. увеличилась в 350 млн раз. Фотоны таких энергий использовались для опытов по расщепления фотона в поле ядра. Укажем для сравнения, что в обычных рентгеновских установках получают фотоны с энергией всего 10–100 кэВ.

В опытах на ускорителе SLAC (Стэнфорд, 1996) электроны с энергией $\varepsilon_1 = 46$ ГэВ сталкивались с лазерными фотонами с энергией $\omega_1 = 1,2$ эВ. В этом случае $x = 0,85$ и рассеянный фотон имел энергию $\omega_2 = 21$ ГэВ, т. е. отбирал у начального электрона почти половину его энергии. Лазерный пучок хорошо фокусировался, в фокусе концентрация фотонов достигала значений $\sim 10^{28}$ фотонов/см^3, так что напряженность электрического поля $\mathcal{E} \sim 10^{11}$ В/см, а в системе покоя налетающего электрона напряженность лазерного поля $\mathcal{E} \sim 10^{16}$ В/см. Поэтому в этом опыте наблюдался нелинейный эффект Комптона с поглощением 1, 2, 3, 4 фотонов.

Наконец, в проекте TESLA для получения встречных γe и $\gamma\gamma$ пучков предполагается использовать лазерную конверсию электронов в γ кванты, при этом $\varepsilon_1 = 250$ ГэВ, $\omega_1 = 1,2$ эВ и $\max\omega_2 = 205$ ГэВ.

15.4. Основные характеристики процессов $e^+e^- \to \gamma\gamma$ и $\gamma\gamma \to e^+e^-$ при высоких энергиях

ПРИЛОЖЕНИЯ

В этих приложениях собраны основные факты, относящиеся к теме “Релятивистская квантовая механика электрона”

§ A. Напоминание про уравнение Паули и спиноры

A.1. Матрицы Паули

Напомним известные факты про спин электрона. Пусть $\hat{\mathbf{s}}$ — оператор спина электрона. Определим матрицы Паули $\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z$ соотношением

$$\hat{\mathbf{s}} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,,$$

тогда

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Их свойства:

$$\sigma_j\sigma_k = I\,\delta_{jk} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkn}\,\sigma_n, \quad \mathrm{Sp}\,\sigma_j = 0, \quad \mathrm{Sp}\,I = 2\,,$$

где I — единичная матрица. Любую квадратную 2×2 матрицу A можно представить в виде

$$A = a_0\,I + \mathbf{a}\,\boldsymbol{\sigma}, \quad a_0 = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,A, \quad \mathbf{a} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(A\boldsymbol{\sigma})\,.$$

A.2. Уравнение Паули

Магнитный момент заряженной частицы, обусловленный её орбитальным движением, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l$ связан с её орбитальным моментом $\hat{\mathbf{l}}$ соотношением

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_l = \frac{e\hbar}{2mc}\,\hat{\mathbf{l}}\,.$$

Связь же собственного магнитного момента частицы $\hat{\boldsymbol{\mu}}_s$ с ее спином $\hat{\mathbf{s}}$, как показывает опыт, зависит от вида частицы, в частности, для электрона, протона и нейтрона имеем

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_s = \mu_s 2\hat{\mathbf{s}} = \mu_s\,\boldsymbol{\sigma}\,,$$

$$\mu_e = \left(-1,001\ 159\ 625\ 187 \pm 4\cdot 10^{-12}\right)\mu_{\mathrm{B}} \approx -\mu_{\mathrm{B}} \,=\, -\frac{|e|\hbar}{2m_e c}\,,$$

$$\mu_p \approx 2,79\,\mu_{\text{я}}\,, \quad \mu_n \approx -1,91\,\mu_{\text{я}}\,, \quad \mu_{\text{я}} = \frac{|e|\hbar}{2m_p c}\,.$$

С учетом магнитного момента уравнение для движения частицы со спином $s = 1/2$ и зарядом e в электромагнитном поле принимает вид (В. Паули, 1927 г.)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi\,, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi - \hat{\boldsymbol{\mu}}_s\mathbf{B}\,, \qquad (A.1)$$

в котором волновая функция — двухкомпонентный спинор

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_2(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} .$$

Плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и условие нормировки таковы:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Psi^{+}\Psi \equiv |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 , \quad \int \rho(\mathbf{r}, t)\, d^3r = 1 .$$

В частности, движения спина электрона в магнитном поле определяется уравненим

$$\frac{d\hat{\mathbf{s}}}{dt} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\mathbf{s}}\right] = \frac{1}{\hbar}\,\hat{\boldsymbol{\mu}}_e \times \mathbf{B} \approx -\frac{2\mu_{\mathrm{B}}}{\hbar}\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{B} .$$

В случае квазиклассичности движения электрона, усредняя это уравнение по квазиклассическому волновому пакету, получим для средних значений

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} \approx \frac{e}{mc}\mathbf{s} \times \mathbf{B} .$$

Аналогичное уравнение для скорости электрона имеет хорошо известный вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} .$$

Таким образом, в магнитном поле $\mathbf{B}$ как вектор скорости, так и вектор спина электрона прецессируют вокруг направления магнитного поля $\mathbf{B}$ с одной и той же (циклотронной) частотой

$$\boldsymbol{\omega}_c = -\frac{e\mathbf{B}}{mc} .$$

Поэтому проекция спина на направление скорости $\mathbf{v}$ остается неизменной (учет малого отличия $\hat{\boldsymbol{\mu}}_e$ от $-2\mu_{\mathrm{B}}\hat{\mathbf{s}}$ приводит к небольшому рассогласованию этих скоростей).

Покажите, что имеет место соотношение

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2 + e\phi . \qquad (A.2)$$

Оно окажется полезным в дальнейшем при анализе возможных релятивистских обобщений уравнения Паули.

А.3. Преобразование спиноров при поворотах и отражениях координат

Общий вид оператора поворота на угол ω вокруг оси $\mathbf{n}$ нам известен. Для спинорной волновой функции этот оператор может быть представлен в виде матрицы

$$U_{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\omega/2} .$$

Поэтому закон преобразования спиноров при повороте таков:

$$\Psi'(\mathbf{r}',\, t) = U_{\boldsymbol{\omega}}\,\Psi(\mathbf{r},\, t) = \left[\cos{(\omega/2)} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,\sin{(\omega/2)}\,\right]\,\Psi(\mathbf{r},\, t)\,, \qquad (A.3)$$

при этом состояние Ψ' соответствует вектору спина, повернутому на угол $(-\omega\mathbf{n})$ по отношению к вектору спина в состоянии Ψ. Из (3) видно, что при повороте на 2π компоненты спиноров изменяют знак:

$$\Psi' = -\Psi \ \text{ при } \ \omega = 2\pi\,.$$

Покажем, что оператор спина при преобразованиях поворота ведет себя как вектор, то есть преобразованный оператор $U^{-1}\boldsymbol{\sigma}U = \Lambda\boldsymbol{\sigma}$, где Λ — матрица поворота $\mathbf{r}' = \Lambda\mathbf{r}$.

Так как произвольный поворот может быть представлен как последовательность трех поворотов (вокруг оси z, затем вокруг оси y и снова вокруг оси z), то достаточно рассмотреть поведение оператора спина при вращениях вокруг осей z и y. При повороте системы координат на угол ω вокруг оси z радиус-вектор преобразуется по закону

$$x' = x\cos\omega + y\sin\omega\,, \quad y' = -x\sin\omega + y\cos\omega\,, \quad z' = z\,,$$

а оператор поворота имеет вид

$$U_{\boldsymbol{\omega}} \equiv U_z(\omega) = \cos(\omega/2) + \mathrm{i}\,\sigma_z\,\sin(\omega/2)\,.$$

Используя свойства матриц Паули, получим

$$U_z^{-1}(\omega)\,\sigma_x\,U_z(\omega) = \,[\cos(\omega/2) - \mathrm{i}\,\sigma_z\,\sin(\omega/2)\,]\,\sigma_x\,[\cos(\omega/2) + \mathrm{i}\,\sigma_z\,\sin(\omega/2)\,] =$$

$$= \sigma_x\cos\omega + \sigma_y\sin\omega\,,$$

а также

$$U_z^{-1}(\omega)\,\sigma_y\,U_z(\omega) = -\sigma_x\sin\omega + \sigma_y\sin\omega\,; \quad U_z^{-1}(\omega)\,\sigma_z\,U_z(\omega) = \sigma_z\,,$$

то есть в этом случае оператор спина преобразуется так же как и радиус-вектор. Рассмотрим теперь поворот на угол ω вокруг оси y, при котором

$$x' = x\cos\omega - z\sin\omega\,, \quad z' = x\sin\omega + z\cos\omega\,, \quad y' = y\,.$$

Преобразования спина в этом случае

$$U_y^{-1}(\omega)\,\sigma_x\,U_y(\omega) = [\cos(\omega/2) - \mathrm{i}\,\sigma_y\,\sin(\omega/2)\,]\;\sigma_x\,[\cos(\omega/2) + \mathrm{i}\,\sigma_y\,\sin(\omega/2)\,] =$$

$$= \sigma_x\cos\omega - \sigma_z\sin\omega\,,$$

а также

$$U_y^{-1}(\omega)\,\sigma_y\,U_y(\omega) = \sigma_x\sin\omega + \sigma_z\sin\omega\,; \quad U_y^{-1}(\omega)\,\sigma_y\,U_z(\omega) = \sigma_y\,,$$

то есть и в этом случае оператор спина преобразуется так же как и радиус-вектор. Таким образом, и при произвольном повороте оператор спина $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ действительно преобразуется по обычному векторному закону

$$U_{\boldsymbol{\omega}}^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}\,U_{\boldsymbol{\omega}} = \Lambda\,\boldsymbol{\sigma}\,, \tag{$A.4a$}$$

где Λ — матрица поворота, соответствующая преобразованию

$$\mathbf{r}' = \Lambda\mathbf{r}\,. \tag{$A.4b$}$$

В частности, если спинору

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

соответствует среднее значение вектора спина вдоль оси z (то есть $\Psi^+\boldsymbol{\sigma}\Psi = (0,\, 0,\, 1)$), то спинору

$$\Psi_{\mathbf{n}} = U_z(-\varphi)U_y(-\theta)\Psi = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}$$

соответствует среднее значение вектора спина вдоль единичного вектора

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\, \sin\theta\sin\varphi,\, \cos\theta)\,,$$

определённого полярным углом θ и азимутальным углом φ, то есть

$$\Psi_{\mathbf{n}}^+\,\boldsymbol{\sigma}\,\Psi_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}\,.$$

При отражении координат $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ спин (как и момент импульса $\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$) не изменяет своего вида. Поэтому не изменяется и значение его z-проекции. Это означает, что каждая компонента спинора преобразуется только через саму себя, то есть

$$\hat{P}\,\Psi(\mathbf{r},\, t) = \eta_P\,\Psi(-\mathbf{r},\, t)\,, \tag{A.5}$$

где η_P — фазовый множитель. При двойном отражении мы вернемся к исходной системе координат. Если определить двойное отражение как тождественное преобразование, то $\eta_P^2 = 1$ и $\eta_P = \pm 1$. Если же определить двойное отражение как поворот на 2π , то $\eta_P^2 = -1$ и $\eta_P = \pm\mathrm{i}$. Таким образом, при отражении координат матрица $U = \eta_P\, I$ и преобразованный оператор спина равен исходному:

$$U^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}U = \boldsymbol{\sigma}\,. \tag{A.6}$$

В итоге, **при отражениях и поворотах системы координат оператор спина ведет себя как аксиальный вектор**.

Обсудим теперь вопрос о ковариантности уравнения Паули относительно поворотов и отражения координат. Представим оператор Гамильтона из (1) в виде суммы двух слагаемых

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_s\mathbf{B}\,, \;\; \hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi\,.$$

Слагаемое $\hat{H}_0$ является истинным скаляром и не изменяет своего вида при повороте или отражении координат. Магнитное поле определяется уравнением $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, где векторный потенциал $\mathbf{A}$ является полярным вектором, поэтому магнитное поле $\mathbf{B}$ является аксиальным вектором (или псевдовектором), не изменяющим своего вида при отражении координат. Поэтому для доказательства ковариантности слагаемого $\hat{\boldsymbol{\mu}}_s\mathbf{B} = 2\mu_s\hat{\mathbf{s}}\mathbf{B}$ достаточно показать, что оператор $\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$ преобразуется как псевдовектор, что и было показано выше.

§ B. Уравнение Клейна–Фока–Гордона (КФГ)

В релятивистской теории операторы

$$\hat{p}_0 = \frac{\mathrm{i}\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$$

образуют 4-мерный вектор

$$\hat{p}^\mu = \mathrm{i}\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\, -\nabla\right) \equiv \mathrm{i}\hbar\partial^\mu .$$

Уравнение Шрёдингера

$$c\hat{p}_0\,\Psi(t,\mathbf{r}) = \left\{\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\phi\right\}\Psi(t,\mathbf{r})$$

и уравнение Паули

$$c\hat{p}_0\,\Psi(t,\mathbf{r}) = \left\{\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2 + e\phi\right\}\Psi(t,\mathbf{r})$$

не является релятивистски ковариантными уравнениями, компоненты $\hat{p}_\mu$ входят в них явно несимметричным образом: эти уравнения содержат первые степени оператора $\hat{p}_0$ и вторые степени оператора $\hat{\mathbf{p}}$. Простейшие релятивистские обобщения этих уравнений можно получить двумя способами:

1) потребовав, чтобы в уравнение входила вторая степень оператора $\hat{p}_0$ (в этом случае мы прийдём к уравнению Клейна–Фока–Гордона);

2) потребовав, чтобы в уравнение входила первая степень оператора $\hat{\mathbf{p}}$ (в этом случае мы прийдём к уравнению Дирака).

Классическое соотношение для компонент 4-импульса релятивистской частицы[5]

$$\left(p - \frac{e}{c}A\right)^\mu \left(p - \frac{e}{c}A\right)_\mu = m^2c^2\,,$$

где $A^\mu = (A_0(t,\mathbf{r}),\, \mathbf{A}(t,\mathbf{r}))$ — 4-потенциал электромагнитного поля и $A_0(t,\mathbf{r}) \equiv \phi(t,\mathbf{r})$ — скалярный потенциал, соответствует релятивистскому волновому *уравнению Клейна–Фока–Гордона* (1926 – 1927 г.)

$$\left[\left(\mathrm{i}\,\frac{\hbar}{c}\,\partial_t - \frac{e}{c}\,A_0\right)^2 - \left(-\mathrm{i}\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right]\Psi(t,\mathbf{r}) = m^2c^2\,\Psi(t,\mathbf{r})\,. \qquad (B.1)$$

Свободному движению частицы с определенным 4-импульсом $p^\mu = (E/c,\, \mathbf{p})$ соответствует плоская волна

$$\Psi(x) = N\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Et-\mathbf{pr})/\hbar} = N\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mu x^\mu/\hbar}\,. \qquad (B.2a)$$

[5] Здесь и ниже по повторяющимся индексам 4-векторов подразумевается суммирование, т. е. выражение $A^\mu B_\mu$ означает $A^\mu B_\mu \equiv A_0B_0 - A_xB_x - A_yB_y - A_zB_z = A_0B_0 - \mathbf{AB}$. Мы нередко будем использовать сокращенное обозначение $AB \equiv A^\mu B_\mu$.

Если подставить эту волновую функцию в уравнение (1) с $A_\mu = 0$, то найдем естественную связь между энергией и импульсом

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2\,,$$

которой соответствует закон дисперсии, т. е. зависимость энергии от импульса, вида

$$E(\mathbf{p}) = \pm\varepsilon_{\mathbf{p}}\,, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = +c\,\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}\,.$$

Отложим обсуждение двух возможных знаков ± в этом выражении до § D.

Релятивистское уравнение КФГ оказалось уравнением второго порядка по времени. Это приводит к следующему принципиальному отличию от нерелятивистской квантовой механике, основанной на уравнении Шрёдингера — уравнении первого порядка по времени. Один из постулатов квантовой механики — интерпретация квадрата модуля волновой функции как плотности вероятности:

$$\rho(\mathbf{r},t) = \Psi(\mathbf{r},t)^*\,\Psi(\mathbf{r},t)\,.$$

Эта плотность вероятности и плотность тока вероятности

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2m}\,\Psi^*\,\left(-\mathrm{i}\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\Psi + \;\text{ комп. сопр.} \tag{B.3}$$

связаны уравнением непрерывности

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0\,, \tag{B.4}$$

из которого следует, что условие нормировки

$$\int\,\rho(\mathbf{r},t)\,d^3r = 1$$

не изменяется с течением времени.

Подобная интерпретация невозможна для волновой функции уравнения КФГ, так как для неё интеграл $\int\,\Psi(\mathbf{r},t)^*\,\Psi(\mathbf{r},t)\,d^3r$ не сохраняется с течением времени. Естественным релятивистским обобщением 3-вектора (3) является 4-вектор

$$j_\mu = \left\{\Psi^*\left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu\, - \frac{e}{c}A_\mu\right)\Psi + \left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu\,\Psi - \frac{e}{c}A_\mu\Psi\right)^*\cdot\Psi\right\}\,. \tag{B.5}$$

Легко проверит, используя уравнение КФГ, что компоненты этого 4-вектора удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,, \tag{B.6}$$

эквивалентному уравнению (4). Это означает, что роль плотности вероятности должна играть нулевая компонента вектора j_μ, т. е.[6]

$$\rho = \frac{j_0}{c} = \frac{1}{c}\left\{\Psi^*\left(\mathrm{i}\hbar\partial_0\, - \frac{e}{c}A_0\right)\Psi + \left(\mathrm{i}\hbar\partial_0\,\Psi - \frac{e}{c}A_0\Psi\right)^*\cdot\Psi\right\}\,. \tag{B.7}$$

[6]Для плоской волны ($2a$) с энергией $E(\mathbf{p}) = +\varepsilon_{\mathbf{p}}$ плотность вероятности $\rho = 2\varepsilon_{\mathbf{p}}|N|^2$, поэтому при нормировке на одну частицу в объёме $\mathcal{V}$,

$$\int_{\mathcal{V}}\rho\,d^3r = 2\varepsilon_{\mathbf{p}}|N|^2\,\mathcal{V} = 1\,,$$

амплитуда плоской волны равна

$$N \equiv N_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\mathbf{p}}\mathcal{V}}}\,. \tag{B.2b}$$

Однако эта величина не является положительно определённой! Мы покажем ниже, что в квантовой теории поля 4-вектор j_μ играет роль не плотности тока вероятности, но плотности тока заряженных частиц, а в этом случае j_0 может быть отрицательной величиной.

Уравнение КФГ и 4-вектор j_μ инвариантны относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f(x), \quad \Psi \to \Psi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ef(x)/\hbar c}\,, \tag{B.8}$$

где $f(x)$ — произвольная функция $x = (ct,\, \mathbf{r})$.

Обсудим нерелятивистский предел $\mathbf{p}^2 \ll m^2c^2$ уравнения КФГ. В этом случае

$$E = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{p}^2)^2}{8m^3c^2} + \dots\,.$$

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы в потенциальном поле $U(r)$. Релятивистская поправка к нерелятивистскому оператору Гамильтона

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(r)$$

возникает из-за изменения закона дисперсии. Соответствующее возмущение равно

$$\hat{V} = -\frac{\left(\hat{\mathbf{p}}^2\right)^2}{8m^3c^2}\,.$$

В кулоновской задаче (при $U(r) = -e^2/r$) эта поправка снимает вырождение по l в спектре и приводит к **тонкой структуре уровней**. Возникающая поправка к энергии

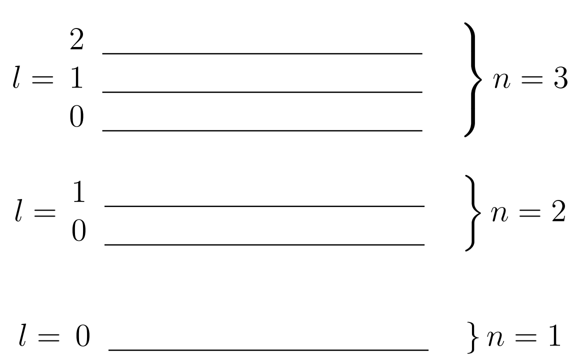
$$\Delta E_{nl} = \langle nl|\, \hat{V}\, |nl\rangle = -\frac{1}{2mc^2}\left\langle nl \left| \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right)^2 \right| nl \right\rangle$$

может быть переписана с учетом

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \hat{H}_0 + \frac{e^2}{r}\,, \quad \hat{H}_0\,|nl\,\rangle = E_n\,|nl\,\rangle$$

в виде

$$\Delta E_{nl} = -\frac{1}{2mc^2}\left\langle nl \left| \left(E_n + \frac{e^2}{r}\right)^2 \right| nl \right\rangle = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\,\frac{\alpha^2}{n^3}\,\left(\frac{1}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right). \tag{B.9}$$



Тонкая структура уровней атома водорода согласно (B.9).

Здесь

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

— безразмерная константа, постоянная тонкой структуры. Однако реальный спектр атома водорода отличается от этого спектра. Причина в том, что уравнение КФГ не учитывает спин электрона.

§ C. Уравнение Дирака

C.1. Симметричная форма уравнения Дирака

В нерелятивистской квантовой механике спин электрона учитывается в уравнении Паули (см. (A.1), (A.2)), которое мы представим в форме

$$\left\{\sigma_0 \left(c\hat{p}_0 - eA_0\right) \; - \; \frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]^2\right\}\Psi(t, \mathbf{r}) = 0\,,$$

где σ_0 — единичная матрица. Естественное релятивистское обобщение уравнения Паули выглядит так:

$$\left\{\left[\gamma_0\left(\hat{p}_0 - \frac{e}{c}A_0\right) - \boldsymbol{\gamma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]^2 - m^2c^2\right\}\Psi(x) = 0, \qquad (C.1)$$

где $\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma})$ — некоторые матрицы, а $x = (ct, \mathbf{r})$ — 4-радиус-вектор. Представим оператор второго порядка $\{\ldots\}$ в левой части уравнения (1) в факторизованном виде

$$\{\ldots\} = \left[\gamma^\mu\left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) + mc\right]\left[\gamma^\mu\left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right].$$

Функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), если она является решением уравнения первого порядка

$$\left[\gamma^\mu\left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right]\,\Psi(x) = 0\,. \qquad (C.2)$$

Это и есть *уравнение Дирака* (1928 г.). Конечно, все предыдущее не вывод, а лишь наводящие соображения. Мы постулируем уравнение Дирака в виде (2), а справедливость его подтверждается соответствием следствий из него эксперименту.

Отметим сразу же основное свойство матриц γ^μ. Решение уравнения Дирака для свободной частицы

$$\left(\gamma^\mu\hat{p}_\mu - mc\right)\Psi(x) = 0 \qquad (C.3)$$

удовлетворяет также уравнению (1) (при $A_\mu = 0$), которое мы перепишем в форме

$$\left(\gamma^\mu\hat{p}_\mu + mc\right)\,\left(\gamma^\nu\hat{p}_\nu - mc\right)\,\Psi(x) = 0\,. \qquad (C.1a)$$

Чтобы сохранить обычную связь между энергией и импульсом, $E^2 = (\mathbf{p}^2 + m^2c^2)c^2$, естественно потребовать, чтобы уравнение ($1a$) совпадало с уравнением Клейна–Фока–Гордона $(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - m^2c^2)\;\Psi(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I\,. \qquad (C.4)$$

Сколько компонент у волновой функции $\Psi(x)$? При выяснении этого вопроса важную роль играет инвариантность уравнения Дирака относительно отражений пространственных осей или P-инвариантность.

При повороте на угол ω вокруг оси $\mathbf{n}$ преобразование 2-компонентного спинора φ имеет вид (A.3)

$$\varphi' = \exp\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\,\varphi = \left[\,\cos(\omega/2) + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,\sin(\omega/2)\,\right]\,\varphi\,. \qquad (C.5a)$$

Оператор поворота $\exp\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)$ не нарушает P-инвариантность, так как и спин (собственный момент импульса электрона) $\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$, и ось поворота $\mathbf{n}$ — аксиальные векторы, а потому произведение $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ — истинный скаляр.

Преобразование Лоренца вдоль оси x со скоростью V имеет вид

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\omega - ct\,\mathrm{sh}\,\omega\,,\quad ct' = ct\,\mathrm{ch}\,\omega - x\,\mathrm{sh}\,\omega\,,\quad \mathrm{ch}\,\omega = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,,\quad \mathrm{sh}\,\omega = \frac{(V/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

и соответствует гиперболическому повороту в плоскости x, ct, а соответствующее преобразование спинора может быть получено заменой $\omega \to \mathrm{i}\omega$ в уравнении ($5a$), что даёт

$$\varphi' = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\omega\sigma_x\right)\,\varphi\,,$$

где быстрота ω определяется соотношением $\mathrm{th}\,\omega = V/c$. В случае преобразования Лоренца, задаваемого произвольным вектором скорости $\mathbf{V}$, имеем

$$\varphi' = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\,\varphi = \left[\,\mathrm{ch}\,(\omega/2) - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,\mathrm{sh}\,(\omega/2)\,\right]\,\varphi\,,\quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V}\,,\quad \mathrm{th}\,\omega = \frac{V}{c}\,. \qquad (C.6)$$

Оператор $\exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\omega\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)$ нарушает P-инвариантность, так как скорость $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$ — полярный вектор, и следовательно $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ — псевдоскаляр, изменяющий знак при отражении координат.

Поэтому для сохранения P-инвариантности уравнения Дирака приходится вводить второй спинор χ с другим, чем у φ поведением при отражении координат. Если

$$\hat{P}\,\varphi(t,\mathbf{r}) = \eta_P\,\varphi(t,-\mathbf{r})\,,\quad \hat{P}\,\chi(t,\mathbf{r}) = -\eta_P\chi(t,-\mathbf{r})\,, \qquad (C.7a)$$

где η_P — фазовый множитель, то преобразование вида

$$\varphi' = \varphi\,\mathrm{ch}\,(\omega/2) - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,\chi\,\mathrm{sh}\,(\omega/2)\,,\quad \chi' = \chi\,\mathrm{ch}\,(\omega/2) - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,\varphi\,\mathrm{sh}\,(\omega/2) \qquad (C.8a)$$

сохраняет P-инвариантность. Двухкомпонентные спиноры φ и χ объединяются в 4-компонентный спинор, или биспинор

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \chi(x)\end{pmatrix}\,,$$

для которого преобразование ($5a$), соответсвующее повороту, имеет вид

$$\Psi' = \exp\left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{n}\right)\,\Psi = \left[\,\cos(\omega/2) + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{n}\,\sin(\omega/2)\,\right]\,\Psi\,, \qquad (C.5b)$$

а формула ($8a$), соответствующая преобразованию Лоренца, имеет вид

$$\Psi' = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\,\omega\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}\right)\,\Psi = \left[\,\mathrm{ch}(\omega/2) - \,\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}\,\mathrm{sh}(\omega/2)\,\right]\,\Psi\,, \qquad (C.8b)$$

где матрицы

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{C.9}$$

являются эрмитовыми и удовлетворяют соотношениям

$$\Sigma_j \Sigma_k = I\,\delta_{jk} + \mathrm{i}\varepsilon_{jkn}\,\Sigma_n\,, \quad \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2I\,\delta_{jk}\,.$$

Преобразование (7a), соответствующее отражению пространственных координат, может быть записано в виде

$$\Psi^P(x) \equiv \hat{P}\,\Psi(t,\mathbf{r}) = \eta_P\,U_P\,\Psi(t,-\mathbf{r})\,, \quad U_P = U_P^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \tag{C.7b}$$

Найдём 4×4 матрицы γ_μ, рассматривая для простоты уравнение Дирака для свободной частицы (3). При отражении координат оператор $\hat{p}_0$ не изменяется, а оператор $\hat{\mathbf{p}}$ изменяет знак. Если в уравнении Дирака $(\gamma_0\hat{p}_0 - \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}} - mc)\,\Psi(t,\mathbf{r}) = 0$ провести замены $\hat{\mathbf{p}} \to -\hat{\mathbf{p}}$, $\Psi(t,\mathbf{r}) \to \Psi(t,-\mathbf{r}) = \eta_P^{-1} U_P\,\Psi^P(x)$, соответствующие P-отражению, то получим уравнение

$$(\gamma_0\hat{p}_0 + \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}} - mc)\;U_P\,\Psi^P(x) = 0\,.$$

Таким образом, чтобы функция $\Psi^P(x)$ удовлетворяла тому же уравнению, что и функция $\Psi(x)$, матрицы γ_μ должны удовлетворять условиям

$$U_P\gamma_0 = \gamma_0 U_P, \quad U_P\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}U_P\,.$$

Ясно поэтому, что можно выбрать

$$\gamma_0 = U_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Из $U_P\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}U_P = 0$ следует, что

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix},$$

а соотношение

$$\gamma_m\gamma_n + \gamma_n\gamma_m = -2\delta_{mn}\,I\,; \quad m,\,n = x,\,y,\,z$$

удовлетворяется, если выбрать $B_n = -C_n = \sigma_n$, где σ_n — матрицы Паули. Итак[7],

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.10}$$

C.2. Релятивистская ковариантность уравнения Дирака

Пусть при произвольном преобразовании Лоренца 4-радиус вектор x_μ преобразуется по закону

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}\,x^\nu\,,$$

[7]Наш выбор соответствует так называемому *стандартному представлению*. Возможны и другие выборы матриц Дирака, получаемые из стандартного при преобразовании $\gamma_\mu \to U\gamma_\mu U^{-1}$, где U — унитарная матрица.

а соответсвующее преобразование биспинора Дирака задаётся матрицей U:

$$\Psi'(x') = U\,\Psi(x)\,.$$

Чтобы доказать релятивистскую ковариантность уравнения Дирака, достаточно показать, что найденные выше операторы γ_μ преобразуются как 4-векторы, то есть преобразованный оператор $U^{-1}\gamma_\mu U$ удовлетворяет соотношению (ср. с обсуждением преобразования оператора $\boldsymbol{\sigma}$ относительно поворотов в § А.3)

$$U^{-1}\gamma_\mu U = \Lambda_{\mu\nu}\,\gamma^\nu\,. \tag{C.11}$$

Это легко проверить непосредственно для поворотов, когда $U = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{n}\right)$, и для простого преобразования Лоренца, когда $U = \exp\left(-\frac{1}{2}\,\omega\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{n}\right)$. При этом оказываются полезными соотношения

$$\boldsymbol{\Sigma}\,\gamma_0 = \gamma_0\,\boldsymbol{\Sigma}\,,\quad \boldsymbol{\alpha}\,\gamma_0 = -\gamma_0\,\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{C.12}$$

$$\Sigma_j\gamma_k = \begin{cases} -\gamma_k\Sigma_j = i\varepsilon_{jkl}\gamma_l & \text{при}\ \ j\neq k \\ -\gamma_k\Sigma_j & \text{при}\ \ j=k\,, \end{cases} \quad \alpha_j\gamma_k = \begin{cases} \gamma_k\alpha_j & \text{при}\ \ j\neq k \\ -\gamma_0 & \text{при}\ \ j=k\,. \end{cases}$$

Значит, уравнение (11) справедливо и для общего случая, который всегда можно рассматривать как комбинацию этих двух простых преобразований.

Назовем функцию

$$\overline{\Psi}(x) \equiv \Psi^+(x)\gamma_0$$

дираковски сопряженной функции $\Psi(x)$. Она преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}'(x') = \Psi^+(x)\,U^+\gamma_0\,,$$

причем, для поворотов (5b), когда $U = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{n}\right)$, и для простого преобразования Лоренца (8b), когда $U = \exp\left(-\frac{1}{2}\,\omega\boldsymbol{\alpha}\mathbf{n}\right)$, из (12) следует, что

$$U^+\gamma_0 = \gamma_0 U^{-1}\,.$$

Значит, и в общем случае дираковски сопряженная функция преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}\,U^{-1}\,,$$

откуда видно, что величина

$$\overline{\Psi}\,\Psi = \varphi^+\varphi - \chi^+\chi$$

преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}'\,\Psi' = \overline{\Psi}\,\Psi\,,$$

т. е. является скаляром, а величина $\overline{\Psi}\,\gamma_\mu\Psi$ преобразуется по закону

$$\overline{\Psi}'\,\gamma_\mu\,\Psi' = \Lambda_{\mu\nu}\,\overline{\Psi}\,\gamma^\nu\,\Psi\,,$$

т. е. является 4-вектором. Аналогично, можно показать, что величины $\overline{\Psi}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi$ является 4-тензором второго ранга, а величины $\overline{\Psi}\,\gamma_5\Psi$ и $\overline{\Psi}\,\gamma_5\gamma_\mu\Psi$, где

$$\gamma_5 = -\mathrm{i}\gamma_0\gamma_x\gamma_y\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{C.10a}$$

преобразуются как псевдоскаляр и аксиальный 4-вектор соответственно.

C.3. Плотность тока

Дираковски сопряженная функция удовлетворяет уравнению

$$\left(-\mathrm{i}\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu - mc\,\overline{\Psi}(x) = 0\,. \qquad (C.13)$$

Домножим это уравнение справа на $\Psi(x)$ и вычтем из уравнения (2), домноженного слева на $\overline{\Psi}(x)$, тогда получим уравнение

$$\left(\partial_\mu\,\overline{\Psi}(x)\right)\,\gamma^\mu\,\Psi(x) + \overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\Psi(x) = 0\,,$$

которое можно переписать в виде закона сохранения 4-мерного тока. Если ввести *4-мерную плотность тока*

$$j_\mu(x) = c\,\overline{\Psi}(x)\,\gamma_\mu\,\Psi(x)\,, \qquad (C.14)$$

то она будет удовлетворять уравнению непрерывности

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0\,.$$

Для дираковской частицы плотность вероятности

$$\varrho(x) = j_0(x)/c = \overline{\Psi}(x)\gamma_0\Psi(x) = \Psi^+(x)\Psi(x) \qquad (C.15)$$

является положительно определенной функцией. Плотность 3-мерного тока равна

$$\mathbf{j}(x) = c\,\overline{\Psi}(x)\;\boldsymbol{\gamma}\Psi(x) = c\,\Psi^+(x)\boldsymbol{\alpha}\Psi(x)\,, \qquad (C.16)$$

где эрмитовы матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0\boldsymbol{\gamma}$ определены в (9). Уравнение Дирака и плотность дираковского тока, разумеется, инвариантны относительно калибровочного преобразования (4.8).

C.4. Зарядовое сопряжение и отражение времени

Рассмотрим еще свойство уравнения Дирака относительно C (зарядовое сопряжение) преобразования. Если функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (2), то легко проверить, что функция

$$\Psi^C(x) = C\overline{\Psi}(x)\,,\;\; C = \gamma_y\gamma_0 = -\alpha_y \qquad (C.17)$$

соответствует зарядово-сопряженной частице, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\left[\gamma^\mu\left(\mathrm{i}\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu\right) - mc\right]\,\Psi^C(x) = 0\,, \qquad (C.2b)$$

которое отличается от уравнения (2) для $\Psi(x)$ лишь знаком заряда e.

Аналогично, если функция $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (3), то легко проверить, что функция

$$\Psi^T(t,\mathbf{r}) = U_T\overline{\Psi}(-t,\mathbf{r})\,,\;\; U_T = \mathrm{i}\gamma_z\gamma_x\gamma_0 \qquad (C.18)$$

удовлетворяет тому же уравнению. Наконец, укажем, что действие трёх преобразований C, P и T определяется соотношением:

$$\Psi^{CPT}(t,\mathbf{r}) = \mathrm{i}\gamma_5\Psi(-t,-\mathbf{r})\,,\;\; \gamma_5 = -\mathrm{i}\gamma_0\gamma_x\gamma_y\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\,. \qquad (C.19)$$

C.5. Гамильтонова форма уравнения Дирака

Умножив уравнение (2) на γ_0 слева, получим уравнение Дирака в гамильтоновой форме

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\,\Psi,\quad \hat{H}=\boldsymbol{\alpha}(c\hat{\mathbf{p}}-e\mathbf{A})+mc^2\gamma_0+eA_0\,,\ \ \hat{\mathbf{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla\,. \qquad (C.20)$$

Отсюда оператор скорости равен

$$\hat{\mathbf{v}}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\hat{H},\mathbf{r}]=c\,\boldsymbol{\alpha}\,, \qquad (C.21)$$

а операторное уравнение движения во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=e\boldsymbol{\mathcal{E}}+e\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{B}$$

является аналогом классического уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\mathbf{v}/c)^2}}=e\boldsymbol{\mathcal{E}}+e\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\,.$$

В центральном поле (при $\mathbf{A}=0$, $eA_0=U(r)$) орбитальный момент $\hat{\mathbf{l}}=\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{p}}/\hbar$ и спин

$$\hat{\mathbf{s}}=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}$$

в отдельности не сохраняются:

$$\frac{d\hat{\mathbf{l}}}{dt}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\hat{H},\hat{\mathbf{l}}]=\frac{c}{\hbar}\,\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\mathbf{p}},\quad \frac{d\hat{\mathbf{s}}}{dt}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,[\hat{H},\hat{\mathbf{s}}]=-\frac{c}{\hbar}\,\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\mathbf{p}}\,.$$

Естественно, однако, что сохраняется полный момент $\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{l}}+\hat{\mathbf{s}}$,

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt}=\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\hat{H},\hat{\mathbf{j}}]=0\,.$$

Рассмотрим теперь свободный электрон в состоянии с определенным импульсом $\mathbf{p}$. В этом случае гамильтониан

$$\hat{H}=c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+mc^2\gamma_0$$

также, вообще говоря, не коммутирует с оператором спина,

$$[\hat{H},\hat{\mathbf{s}}]=\mathrm{i}\,c\,\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{p}\,. \qquad (C.22)$$

Однако последняя формула подсказывает два возможных исключения.

1. Если $\mathbf{p}\to 0$ (что справедливо в системе покоя электрона), то правая часть уравнения (22) обращается в нуль

$$[\hat{H},\hat{\mathbf{s}}]=0\quad \text{при}\quad \mathbf{p}\to 0\,. \qquad (C.23)$$

Таким образом, спиновое состояние свободного электрона можно описывать, задавая определенное значение $\sigma=\pm 1/2$ оператора $\hat{s}_z$ в системе покоя электрона.

2. Если умножить уравнение (22) скалярно на вектор $\mathbf{p}$, то правая часть полученного соотношения также обратится в нуль. Поэтому оператор *спиральности* $\hat{\Lambda}$ (проекции спина на направление импульса электрона) коммутирует с гамильтонианом

$$[\hat{H},\,\hat{\Lambda}]=0\,,\ \ \hat{\Lambda}=\hat{\mathbf{s}}\cdot\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\,. \qquad (C.24)$$

Собственные значения оператора $\hat{\Lambda}$ равны $\lambda=\pm 1/2$, а его собственные состояния называются *спиральными состояниями*.

§ D. Свободное движение дираковской частицы

Свободному движению частицы с определённым 4-импульсом p соответствует плоская волна[8]

$$\Psi(x) = u(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,, \quad p\,x \equiv p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{pr}\,, \tag{D.1}$$

где биспинор $u(p)$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,u(p) = 0\,. \tag{D.2}$$

Для двухкомпонентных спиноров $\varphi(p)$ и $\chi(p)$, через которые выражается биспинор

$$u(p) = u(E,\,\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \chi(p) \end{pmatrix}\,,$$

получаем систему уравнений

$$(E-m)\,\varphi - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\chi = 0\,, \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\varphi - (E+m)\,\chi = 0\,.$$

Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю, то есть если $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Введём арифметический, положительный корень

$$\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\,. \tag{D.3}$$

Существуют две возможности:

1. Энергия положительна:

$$E = +\varepsilon\,, \quad \chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon + m}\varphi\,.$$

При нормировке

$$\varphi^+\varphi = 1\,, \quad \bar{u}u = 2m$$

получаем биспинор

$$u(\varepsilon,\,\mathbf{p}) \equiv u_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\varphi \\ \hat{A}\,\varphi \end{pmatrix}\,, \quad \hat{A} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\sqrt{\varepsilon+m}} = \sqrt{\varepsilon - m}\,\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\,, \tag{D.4a}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, при этом

$$\bar{u}_{\mathbf{p}}\,u_{\mathbf{p}} = 2m\,, \quad \bar{u}_{\mathbf{p}}\,\gamma^\mu\,u_{\mathbf{p}} = 2p^\mu\,. \tag{D.4b}$$

2. Энергия отрицательна:

$$E = -\varepsilon, \quad u(-\varepsilon, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\hat{A}\,\chi \\ \sqrt{\varepsilon+m}\,\chi \end{pmatrix}\,.$$

Четыре компоненты волновой функции соответствуют двум возможным ориентациям спина при двух возможных знаках энергии. Исключить состояния с отрицательной энергией нельзя, так как в квантовой механике возможны переходы между состояниями. Дирак постулировал, что уровни с отрицательной энергией заполнены. Тогда переходов на них нет в силу принципа Паули. Дырка в дираковском море ведет себя как

[8] Здесь и ниже (за исключением § F.1) полагаем $\hbar = 1$, $c = 1$.

частица той же массы, что и электрон, но с противоположным зарядом, причём отсутствующему электрону с энергией $(-\varepsilon)$ и импульсом $(-\mathbf{p})$ соответствует частица-дырка с энергией $(+\varepsilon)$ и импульсом $(+\mathbf{p})$. В квантовой теории поля частица-дырка выступает как античастица, а представление о дираковском море оказалось излишним. Такая античастица для электрона была вскоре обнаружена (К. Андерсон, 1932 г.) и названа *позитроном*.

Таким образом, свободному электрону соответствует плоская волна

$$\Psi_p(x) = N\, u_{\mathbf{p}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,, \;\; p\,x = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,, \tag{D.5}$$

где биспинор $u_{\mathbf{p}}$ определён в (4), а множитель N при нормировке на одну частицу во всём объёме $\mathcal{V}$ равен

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mathcal{V}}}\,. \tag{D.6}$$

Свободному позитрону соответствует плоская волна

$$\Psi_{-p}(x) = N\, v_{\mathbf{p}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\,, \;\; p\,x = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,, \tag{D.7}$$

где биспинор $v_{\mathbf{p}}$ определён соотношением

$$v_{\mathbf{p}} \equiv u(-\varepsilon, -\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \hat{A}\,\chi \\ \sqrt{\varepsilon + m}\,\chi \end{pmatrix}\,, \;\; \chi^+\chi = 1\,, \;\; \bar{v}_{\mathbf{p}}\, v_{\mathbf{p}} = -2m\,, \;\; \bar{v}_{\mathbf{p}}\, \gamma^\mu v_{\mathbf{p}} = +2p^\mu\,. \tag{D.8}$$

Так как позитрон является античастицей для электрона, то[9]

$$\Psi_{-p}(x) = C\overline{\Psi}_p(x)\,, \tag{D.9}$$

а биспинор $v_{\mathbf{p}}$ связан с биспинором $u_{\mathbf{p}}$ соотношением

$$v_{\mathbf{p}} = C\,\bar{u}_{\mathbf{p}}\,, \;\; \chi = -\sigma_y\,\varphi\,. \tag{D.10}$$

Биспиноры $u_{\mathbf{p}}$ и $v_{\mathbf{p}}$ взаимно ортогональны:

$$\bar{v}_{\mathbf{p}}\, u_{\mathbf{p}} = \bar{u}_{\mathbf{p}}\, v_{\mathbf{p}} = 0\,. \tag{D.11}$$

В нерелятивистском пределе величина $\hat{A}$ мала, $\sim |\mathbf{p}|/m \ll 1$, поэтому волновая функция свободного электрона (позитрона) фактически становится двухкомпонентной, так как ее нижние (верхние) компоненты оказывается $\sim |\mathbf{p}|/m$.

Отметим также особенность, связанную с оператором скорости $\hat{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\alpha}$. Так как $\hat{v}_x = \alpha_x$, а $\alpha_x^2 = I$, то собственные значения оператора $\hat{v}_x$ равны ± 1 (или $\pm c$ в обычных единицах). Однако собственные функции оператора $\hat{v}_x$ не соответствуют определенному знаку энергии, т. е. обычным физическим состояниям. И наоборот, в состоянии с фиксированной энергией

$$\langle v_x \rangle = u^+(\pm\varepsilon, \mathbf{p})\, \alpha_x\, u(\pm\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{p_x}{\pm\varepsilon}\,,$$

как и должно быть.

[9]Отметим, что этот результат находится в соответствии с формулами зарядового сопряжения (см. $(C.17)$): если функция $\Psi(x) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t/\hbar}$ есть решение стационарного уравнения Дирака для частицы с энергией $E = +\varepsilon$ и зарядом e во внешнем поле, то функция $C\overline{\Psi}(x) \propto \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varepsilon t/\hbar}$ отвечает решению уравнения Дирака для частицы с энергией $E = -\varepsilon$ и противоположным зарядом $(-e)$ в том же поле.

§ E. Поляризация электрона и позитрона

В этом разделе собраны основные формулы, задающие описание поляризационного состояния свободных электронов и позитронов в двух упомянутых в § C.5 подходах.

1. Свободный *электрон* с импульсом $\mathbf{p}$, энергией $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и проекцией спина на ось z в системе покоя электрона, равной σ, описывается волновой функцией

$$\Psi_{p\sigma}(x) = N\, u_{\mathbf{p}\sigma}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,, \quad px = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,. \tag{E.1}$$

Здесь биспинор $u_{\mathbf{p}\sigma}$ удовлетворяет уравнениям

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\; u_{\mathbf{p}\sigma} = 0\,, \tag{E.2a}$$

$$\hat{s}_z\, u_{\mathbf{p}\sigma} = \sigma\, u_{\mathbf{p}\sigma} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to m\,, \tag{E.2b}$$

условию нормировки

$$\bar{u}_{\mathbf{p}\sigma} u_{\mathbf{p}\sigma'} = 2m\, \delta_{\sigma\sigma'} \tag{E.3a}$$

и имеет вид

$$u_{\mathbf{p}\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, \varphi^{(\sigma)} \\ \sqrt{\varepsilon - m}\, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\, \varphi^{(\sigma)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\,. \tag{E.4}$$

Кроме того,

$$\bar{u}_{\mathbf{p}\sigma} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}\sigma'} = 2p^\mu\, \delta_{\sigma\sigma'}\,. \tag{E.3b}$$

Двухкомпоненетные спиноры $\varphi^{(\sigma)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\tfrac{1}{2}\sigma_z\, \varphi^{(\sigma)} = \sigma\, \varphi^{(\sigma)}\,, \quad \varphi^{(\sigma)+} \varphi^{(\sigma')} = \delta_{\sigma\sigma'}\,;$$

явный вид этих спиноров может быть выбран как и в нерелятивистском случае:

$$\varphi^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Множитель N при нормировке на одну частицу во всём объёме $\mathcal{V}$ равен

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon\mathcal{V}}}\,. \tag{E.5}$$

Перейдём теперь к описанию спинового состояния свободного *позитрона*. Напомним, что в картине Дирака зона отрицательных энергий заполненна, а отсутствующему электрону с энергией $(-\varepsilon)$ и импульсом $(-\mathbf{p})$ соответствует частица-дырка (позитрон) с энергией $(+\varepsilon)$ и импульсом $(+\mathbf{p})$. В первом подходе отсутствующему электрону с проекцией спина на ось z, равной $(-\sigma)$ (в системе покоя электрона), соответствует частица-дырка с проекцией спина на ось z, равной $(+\sigma)$. Таким образом, в этом случае *позитрон* с импульсом $\mathbf{p}$, энергией $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и проекцией спина на ось z в системе покоя позитрона, равной σ, описывается волновой функцией

$$\Psi_{-p-\sigma}(x) = C\, \overline{\psi}_{p\sigma}(x) = N\, v_{\mathbf{p}\sigma}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}\,, \quad px = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,. \tag{E.6}$$

Здесь биспинор

$$v_{\mathbf{p}\sigma} = C \bar{u}_{\mathbf{p}\sigma}$$

удовлетворяет уравнениям

$$(-\gamma^\mu p_\mu - m)\; v_{\mathbf{p}\sigma} = 0\,, \tag{E.7a}$$

$$\hat{s}_z\, v_{\mathbf{p}\sigma} = -\sigma\, v_{\mathbf{p}\sigma} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to m\,, \tag{E.7b}$$

условию нормировки

$$\bar{v}_{\mathbf{p}\sigma} v_{\mathbf{p}\sigma'} = -2m\, \delta_{\sigma\sigma'} \tag{E.8a}$$

и имеет вид

$$v_{\mathbf{p}\sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}\, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\, \chi^{(-\sigma)} \\ \sqrt{\varepsilon + m}\, \chi^{(-\sigma)} \end{pmatrix}, \tag{E.9}$$

где двухкомпонентные спиноры

$$\chi^{(-\sigma)} = -\sigma_y \varphi^{(\sigma)} = -2\sigma\mathrm{i}\, \varphi^{(-\sigma)}\,. \tag{E.10}$$

Кроме того,

$$\bar{v}_{\mathbf{p}\sigma} \gamma^\mu v_{\mathbf{p}\sigma'} = 2p^\mu\, \delta_{\sigma\sigma'}\,. \tag{E.8b}$$

Конечно, биспиноры u и v взаимно ортогональны:

$$\bar{v}_{\mathbf{p}\sigma}\, u_{\mathbf{p}\sigma'} = \bar{u}_{\mathbf{p}\sigma}\, v_{\mathbf{p}\sigma'} = 0\,. \tag{E.11}$$

Отметим полезные формулы:

$$\gamma^0 u_{-\mathbf{p}\sigma} = +u_{\mathbf{p}\sigma}\,, \quad \gamma^0 v_{-\mathbf{p}\sigma} = -v_{\mathbf{p}\sigma}\,. \tag{E.12}$$

2. Во втором подходе свободному *электрону* соответствует плоская волна

$$\Psi_{p\lambda}(x) = N\, u_{\mathbf{p}\lambda}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,, \quad px = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,, \tag{E.13}$$

где биспинор $u_{\mathbf{p}\lambda}$ удовлетворяет уравнениям

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\; u_{\mathbf{p}\lambda} = 0\,, \quad \hat{\Lambda}\, u_{\mathbf{p}\lambda} = \lambda\, u_{\mathbf{p}\lambda}\,, \tag{E.14}$$

условию нормировки

$$\bar{u}_{\mathbf{p}\lambda} u_{\mathbf{p}\lambda'} = 2m\, \delta_{\lambda\lambda'}$$

и имеет вид

$$u_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \\ 2\lambda\sqrt{\varepsilon - m}\, w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \tag{E.15}$$

Двухкомпоненетные спиноры $w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ удовлетворяют уравнениям

$$\tfrac{1}{2}\, (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\, w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = \lambda\, w^{(\lambda)}(\mathbf{n})\,, \quad w^{(\lambda)+}(\mathbf{n})\, w^{(\lambda')}(\mathbf{n}) = \delta_{\lambda'\lambda}\,;$$

явный вид этих спиноров таков (см. § 3.3)

$$w^{(\lambda=1/2)}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}; \quad w^{(\lambda=-1/2)}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\theta}{2} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Во втором способе описания спиновых состояний отсутствующему электрону со спиральностью λ (проекцией спина на направление импульса электрона $(-\mathbf{p})$) сотвествует частица-дырка с той же спиральностью λ (проекцией спина на направление импульса дырки ($+\mathbf{p}$)). Таким образом, *позитрон* является зарядово-сопряжённой к электорону частицей и потому описывается волновой функцией

$$\Psi_{-p\lambda}(x) = N\, v_{\mathbf{p}\lambda}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}\,, \quad px = \varepsilon t - \mathbf{pr}\,, \tag{E.16}$$

где биспинор $v_{\mathbf{p}\lambda} = C\bar{u}_{\mathbf{p}\lambda}$ удовлетворяет уравнениям

$$(-\gamma^\mu p_\mu - m)\; v_{\mathbf{p}\lambda} = 0\,, \quad \hat{\Lambda}'\, v_{\mathbf{p}\lambda} = \lambda\, v_{\mathbf{p}\lambda}\,, \quad \hat{\Lambda}' = \hat{\mathbf{s}}\cdot\frac{(-\mathbf{p})}{|\mathbf{p}|}\,, \tag{E.17}$$

условию нормировки

$$\bar{v}_{\mathbf{p}\lambda}\, v_{\mathbf{p}\lambda'} = -2m\,\delta_{\lambda'\lambda}\,,$$

и имеет вид

$$v_{\mathbf{p}\lambda} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}\, w^{(-\lambda)}(\mathbf{n}) \\ -2\lambda\sqrt{\varepsilon + m}\, w^{(-\lambda)}(\mathbf{n}) \end{pmatrix}. \tag{E.18}$$

Конечно, биспиноры $u_{\mathbf{p}\lambda}$ и $v_{\mathbf{p}\lambda}$ взаимно ортогональны:

$$\bar{v}_{\mathbf{p}\lambda}\, u_{\mathbf{p}\lambda'} = \bar{u}_{\mathbf{p}\lambda}\, v_{\mathbf{p}\lambda'} = 0\,. \tag{E.19}$$

§ F. Свойства уравнения Дирака

При рассмотрении нерелятивистского и ультрарелятивистского пределов уравнения Дирака удобно использовать это уравнение в гамильтоновой форме (C.20) с определенной релятивистской энергией ε,

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r})\,, \quad \psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}) \\ \chi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}\,, \tag{F.1}$$

и переписать его в виде системы связанных уравнений для двухкомпонентные спиноры $\varphi(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$:

$$(\varepsilon - mc^2 - eA_0)\,\varphi(\mathbf{r}) = c\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\chi(\mathbf{r})\,, \tag{F.2a}$$

$$(\varepsilon + mc^2 - eA_0)\,\chi(\mathbf{r}) = c\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\varphi(\mathbf{r})\,. \tag{F.2b}$$

F.1. Нерелятивистский предел уравнения Дирака

Проведем разложение уравнения Дирака по степеням v/c до первого порядка включительно. Для этого введем нерелятивистскую энергию $E_{\text{нер}} = \varepsilon - mc^2$ и будем предполагать, что $|E_{\text{нер}}| \ll mc^2$ и $|eA_0| \ll mc^2$. Тогда из ($2b$) в первом порядке по v/c находим

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2mc}\,\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\,\varphi(\mathbf{r})\,.$$

Подставляя это выражение в ($2a$), получаем

$$(E_{\text{нер}} - eA_0)\,\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m}\,\left[\boldsymbol{\sigma}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]^2\,\varphi(\mathbf{r})\,.$$

С учетом (A.2) это уравнение принимает вид уравнения Паули

$$\hat{H}_{\text{нер}}\,\varphi(\mathbf{r}) = E_{\text{нер}}\,\varphi(\mathbf{r})\,,\quad \hat{H}_{\text{нер}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + eA_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}}_e\,\mathbf{B}\,,$$

в котором значение магнитного момента электрона

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_e = \frac{e\hbar}{2mc}\,\boldsymbol{\sigma}$$

получено как простое следствие уравнения Дирака.

Можно показать, что во втором порядке по v/c получается следующее выражение для релятивистского возмущения в кулоновской задаче $U(r) = -e^2/r$:

$$\hat{V} = -\frac{\left(\hat{\mathbf{p}}^2\right)^2}{8m^3c^2} + \frac{e^2\hbar^2}{4m^2c^2r^3}\,\hat{\mathbf{l}}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\pi e^2\hbar^2}{2m^2c^2}\,\delta(\mathbf{r})\,.$$

Используя это возмущение, получим поправку к энергии, соответствующую экспериментально наблюдаемой тонкой структуре спектра атома водорода,

$$\Delta E_{nj} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{\alpha^2}{n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\,.$$

$$\left.\begin{array}{c} 3d_{5/2} \\ 3p_{3/2},\, 3d_{3/2} \\ 3s_{1/2},\, 3p_{1/2} \end{array}\right\}\, n=3$$

$$\left.\begin{array}{c} 2p_{3/2} \\ 2s_{1/2},\, 2p_{1/2} \end{array}\right\}\, n=2$$

$$\left.\begin{array}{c} 2s_{1/2} \end{array}\right\}\, n=1$$

Тонкая структура уровней атома водорода согласно уравнению Дирака

Видно, что сохраняется вырождение уровней с одинаковыми n и j, но разными l.

F.2. Ультрарелятивистский предел уравнения Дирака

Рассмотрим ультрарелятивистский предел уравнения Дирака (1), (2), когда при $\varepsilon \gg m$ в гамильтониане можно пренебречь слагаемым, пропорциональным массе электрона, т. е. когда

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}) + eA_0\,. \qquad (F.3)$$

В этом случае решения уравнения Дирака обладают дополнительной симметрией. Чтобы увидеть это, перепишем (2), пренебрегая массой электрона,

$$(\varepsilon - eA_0)\,\varphi(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\;\chi(\mathbf{r})\,,$$

$$(\varepsilon - eA_0)\,\chi(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\sigma}\,(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\;\varphi(\mathbf{r})\,.$$

Складывая и вычитая эти два уравнения, получим систему несвязанных уравнений

$$\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\,\xi(x) = +(\varepsilon - eA_0)\,\xi(x)\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\,\eta(x) = -(\varepsilon - eA_0)\,\eta(x)\,,$$

где новые двухкомпонентные спиноры ξ и η выражаются линейно через старые:

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\varphi + \chi)\,, \quad \eta = \tfrac{1}{2}(\varphi - \chi)\,.$$

Видно, что новые спиноры ξ и η являются собственными функциями оператора

$$\hat{K} = (\varepsilon - eA_0)^{-1}\,\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})$$

с собственными значениями $+1$ и -1, соответственно. Таким образом, спиноры ξ и η описывают два разных квантовых состояния, которые являются решениями уравнения Дирака с одной и той же энергий ε. Состояние, описываемое спинором $\xi(x)$, называется *киральным состоянием с положительной (или правой, R) киральностью*, а состояние, описываемое спинором $\eta(x)$, называется *киральным состоянием с отрицательной (или левой, L) киральностью.*

При свободном движении дираковской частицы, когда $A_\mu = 0$, оператор $\hat{K} = \boldsymbol{\sigma}\,\hat{\mathbf{p}}/\varepsilon$ лишь множителем 2 отличается от оператора спиральности $\hat{\Lambda} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\hat{\mathbf{p}}/|\mathbf{p}|$, так как в ультрарелятивистском пределе $|\mathbf{p}| = \varepsilon$. Поэтому правым или левым киральным состояниям соответствуют определенные значения спиральности $\lambda = +1/2$ или $\lambda = -1/2$. В квазиклассическом приближении оператору $\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}$ соответствует вектор $m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2}$, а оператору $\varepsilon - eA_0$ — величина $m/\sqrt{1-v^2}$, так что оператору $\hat{K}$ и в этом случае соответствует определенная проекция спина на направление движения частицы.

В обычном формализме четырехкомпонентных спиноров $\psi(\mathbf{r})$ дополнительная симметрия уравнения Дирака при $m = 0$ связана с наличием дополнительного интеграла движения. Соответствующим ему оператором является величина (5.19)

$$\gamma_5 = -\mathrm{i}\gamma_0\gamma_x\gamma_y\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

со свойствами

$$(\gamma_5)^2 = 1\,, \quad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0\,, \quad \gamma_5\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}\gamma_5 = 0\,.$$

Из первого уравнения следует, что собственные значения γ_5 равны ± 1, а из второго и третьего уравнений следует, что γ_5 не коммутирует с полным гамильтонианом $\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}) + eA_0 + m\gamma_0$, содержащим слагаемое $m\gamma_0$, но коммутирует с гамильтонианом (3), в котором это слагаемое отсутствует. Поэтому мы можем ставить задачу на поиск совместных собственных функций операторов $\hat{H}$ (3) и γ_5. Пусть $\psi(\mathbf{r})$ есть некоторое решение уравнения $\hat{H}\,\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\,\psi(\mathbf{r})$. Легко проверить, что функции

$$\psi_R(\mathbf{r}) = \frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{r}) \\ \xi(\mathbf{r}) \end{pmatrix}\,, \quad \psi_L(\mathbf{r}) = \frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{r}) \\ -\eta(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

являются собственными функциями γ_5:

$$\gamma_5\,\psi_{R,L}(\mathbf{r}) = \mp\,\psi_{R,L}(\mathbf{r})\,.$$

Из эксперимента следует, что масса нейтрино очень мала, и что обычно нейтрино можно считать с хорошей точностью левым, а антинейтрино — правым. Во взаимодействиях нейтрино четность не сохраняется.